

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ АСТРОНОМИЈЕ ОБРАДА ПОДАТАКА 02.06.2024. године

Увод

У Јануару 2025. године, очи свих астронома/киња, биће уперене у Чиле, тачније у опсерваторију Вера Рубин. Управо тада се очекују први снимци, са ове опсерваторије. Опсерваторија носи назив по једној од најзначајнијих америчких астрономкиња **Вери Рубин**. Она је крајем прошлог века са својим тимом проучавала ротациону криву галаксије UGC 2885. У раду из 1980. године, објављеном у Астрономском журналу, Вера Рубин, Вилијам Кент и Форд Јр. потврђују постојање материје која не емитује зрачење нити интерагује попут барионске материје.

Ову *егзотичну* форму материје називају **тамна материја**.

Научницима/ама је и у овом веку ова галаксија постала предмет истраживања. Управо ћеш ти са својим тимом анализирати снимке са Хабл свемирског телескопа и Аресибо радио телескопа, како би рекреирао/ла резултате до којих је дошла Вера Рубин.

Како ће овај део такмичења представљати симулацију једног истраживања, поведи рачуна да користиш што прецизније методе за рачунање и обраду података. Потруди се да и саме резултате заокругљујеш на две децимале јер ће се како прецизност тако и тачност метода/резултата бодовати. Примера ради, ако искористиш прецизан метод или погрешиши рачун и добијеш да је Хаблова константа $H_0 \sim 100 \left[\frac{\text{km}}{\text{Mpc}\cdot\text{s}} \right]$, добићеш мање поена него да не погрешиши и срачунаш да је $H_0 \sim 70 \left[\frac{\text{km}}{\text{Mpc}\cdot\text{s}} \right]$, али не брини превише јер ћеш добити и одређен број поена за метод.

П.С. Аутор овог задатка под *својим тимом*, подразумева да је тај тим имагинаран. Строго је забрањена комуникација са осталим такмичарима/кама такмичења.

П.С.С. Срећно и полако читај, имаш времена за све!

1 Хабл-Леметров закон

Хабл је почетком двадесетог века показао да је брзина удаљавања галаксија од Земље сразмерна њиховом растојању и ова релација је дефинисана као:

$$v = H_0 \cdot D \quad (1)$$

где је v $\left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right]$ брзина удаљавања, H_0 је Хаблов параметар док је D растојање између Земље и галаксије изражено у Мрс.

У табели 1 се налазе растојања као и брзине удаљавања за 5 галаксија, које је снимио твој тим.

Име галаксије	Растојање [Мрс]	Брзина удаљавања $\left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right]$
M31	0.78	-300
M81	3.63	142
M101	6.95	241
НГЦ 3198	14.5	663
НГЦ 7331	14.7	816

Табела 1: Растојања и брзине удаљавања за 5 галаксија.

Задатак:

1.1 (20 п) Израчунај вредност Хабловог параметра (H_0) на основу података датих у табели 1.

2 Анализа посматрања у видљивом делу спектра

Спирална галаксија, UGC 2885 се налази у сазвежђу Персеј, она није видљива голим оком, али се може посматрати неким "озбиљнијим" телескопом.

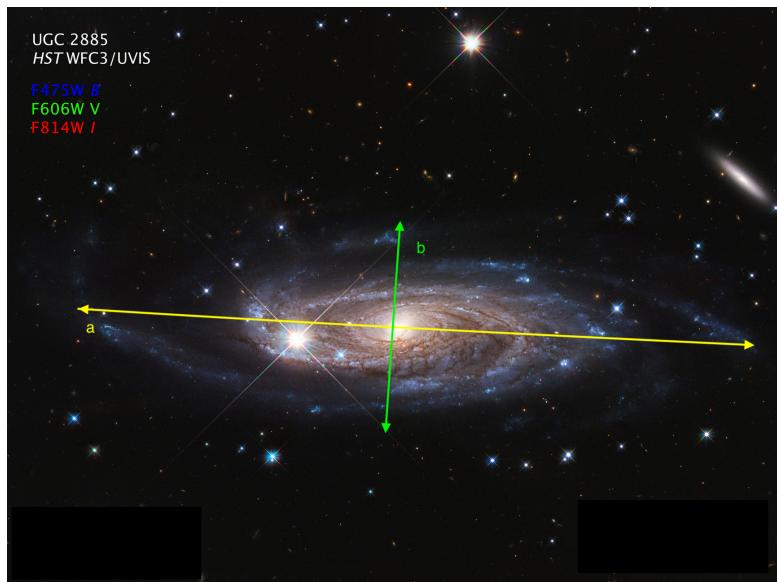
Твој тим је аплицирао за време на Хабл свемирском телескопу. Добили сте време за снимање! Обрађени снимак се налази на слици 1.

На слици су приказане велика и мала оса галаксије које износе $a = 3,9'$ и $b = 1,9'$.

Анализирајући литературу открио/ла си да је могуће израчунати инклинацију (i) галаксије по формулама:

$$\cos^2 i = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - q_0^2}{1 - q_0^2} \quad (2)$$

где је q_0 прави однос оса, претпоставити да он износи $q_0 = 0,3$.



Слика 1: Галаксија UGC 2885 снимљена Хабл свемирским телескопом, камером *WFC3/UVIS*.

Задатак:

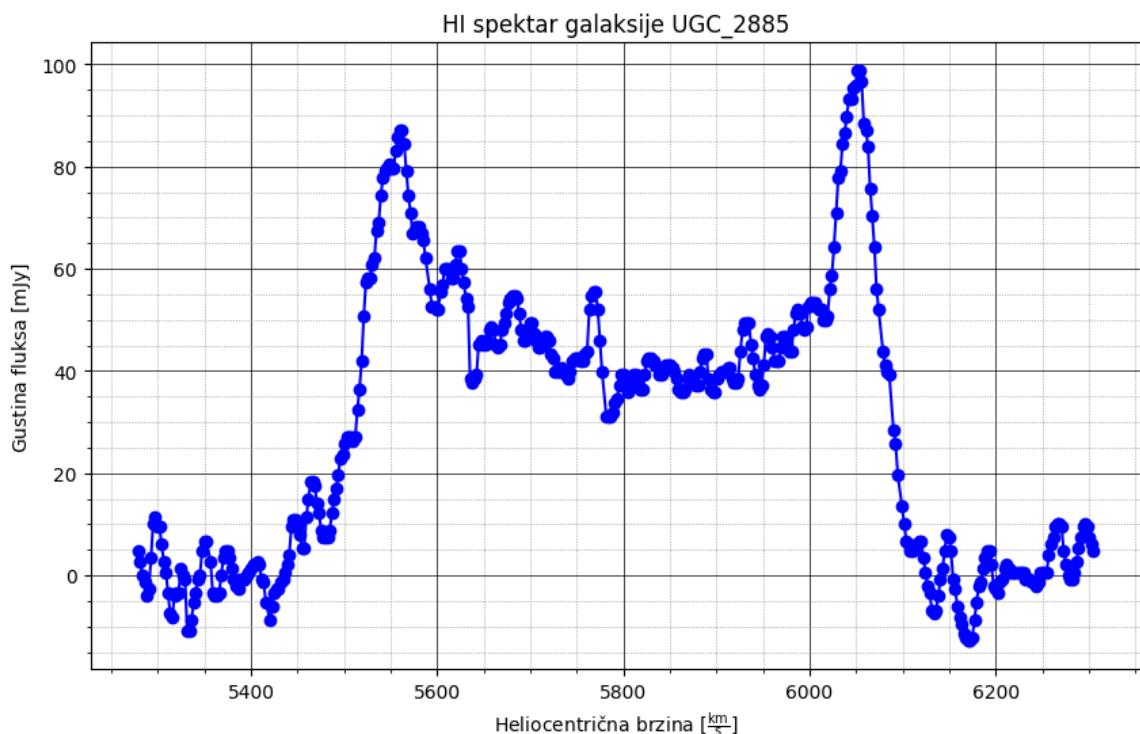
2.1 (2 п) Израчунај инклинацију (i) под којом видимо галаксију UGC 2885.

3 Анализа посматрања неутралног водоника HI

Најзаступљенији хемијски елемент чије присуство превазилази димензије спиралних грана (видљивих у визуелном делу спектра) је неутрални водоник HI.

Неутрални водоник испуњава ретке регионе у међувезданом простору. Овај елемент је могуће детектовати на $\lambda = 21\text{ cm}$. Она настаје променом енергетског стања усамљеног, неутралног, водониковог атома, спонтаном променом спина.

На слици 2 је представљен HI емисиони спектар галаксије UGC 2885, снимљен Аресибо радио телескопом. Лако је уочити Доплеров помак ка плавом односно црвеном делу спектра, који настаје услед ротације галаксије. Овај ефекат је могуће приметити на 2 места где је примећено значајно повећање интензитета флуksа зрачења.



Слика 2: HI емисиони спектар UGC 2885.

Задаци:

- 3.1 (5 п) Анализом слике 2, пронађи брзину (v) којом се галаксија UGC 2885 удаљава од Земље .
- 3.2 (2 п) Одреди растојање $D[\text{Мрс}]$ до галаксије UGC 2885.

4 Маса гаса

Након што вам је познато растојање до галаксије, могуће је израчунати и масу гаса.

Уколико емисија HI долази из оптички танког региона, може се апроксимирати да је укупан флукс зрачења $S(v)$ пропорцијалан маси HI:

$$\left(\frac{M_{HI}}{M_{\odot}} \right) = 2,36 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{D}{\text{Mpc}} \right)^2 \cdot \frac{S(v)}{\text{Jy} \cdot \text{km} \cdot \text{s}^{-1}} \quad (3)$$

Задаци:

- 4.1 (20 п) Анализом слике 2, и решавањем једначине (3), израчунај масу неутралног водоника (M_{H1}) у галаксији UGC 2885.
- 4.2 (2 п) Уколико је познато да је $M_{gas} = 1,33 \cdot M_{HI}$, израчунај укупну масу гаса у овој галаксији.

5 Барионска Тали-Фишерова релација

Тренутно ти је позната маса гаса, већ си упознат да је укупна барионска маса сума масе гаса и масе звезда. У овом делу ћеш управо рачунати барионску масу галаксије UGC 2885.

Крајем седамдесетих година XX века, Р. Брент Тали и Ј. Ричард Фишер су дефинисали емпириску релацију, између масе и праве (интринзичне) луминозности спиралне галаксије.

$$L \sim v_{rot}^4 \quad (4)$$

Почетком ХХI века, овај модел је добио допуну и дефинисана је **Барионска Тали-Фишерова релација**. Према овој релацији укупна барионска маса, галаксије пропорционална је ротационој брзини:

$$M_b = A \cdot v_{rot}^4 \quad (5)$$

где је $A = 50 \cdot M_\odot \frac{\text{s}^4}{\text{km}^4}$, док је $M_b = M_{gas} + M_*$, где је M_* маса звезда у галаксији.

Ротациону брзину галаксије је могуће израчунати према једначини:

$$v_{rot} = \frac{W_{50}}{2 \cdot \sin i} \quad (6)$$

где је W_{50} брзина која се рачуна као ротациона брзина на половини висине максимума флуksа зрачења.

Задаци:

5.1 (20 п) Израчунај ротациону брзину галаксије (v_{rot}).

5.2 (2 п) Израчунај барионску масу галаксије (M_b).

5.3 (2 п) Израчунај масу звезда у галаксији UGC 2885.

6 Укупна маса галаксије

Док си се ти бавио/ла рачунањем барионске масе галаксије UGC 2885 твој тим је за то време анализирао ротациону криву ове галаксије. Током те анализе израчунали су укупну масу галаксије (M).

Све вас је зачудио тај резултат, јер су они израчунали да је укупна маса галаксије за читав ред величине већа него барионска маса коју си ти израчунао/ла. Што вас доводи до истог закључка до којег је дошла и Вера Рубин и тиме потврдила присуство тамне материје.

Ти као искусан/на истраживач/ица желиш да поновиш њихове резултате, и да се увериш да нису погрешили у рачуну или на основу података које си већ израчунао/ла. Позната ти је ротациона брзина галаксије, а и знаш да можеш да израчунаш полуупречник ове галаксије на основу података које имаш са снимака које је направио Хабл свемирски телескоп. Остаје ти још само да не направиш грешку у рачуну!

Задаци:

6.1 (20 п) Израчунај укупну масу галаксије (M).

6.2 (5 п) Израчунај однос укупне масе и барионске масе галаксије $n = \frac{M}{M_b}$.

7 Шта је све потребно израчунати

- 7.1 (20 п) Израчунај вредност Хабловог параметра (H_0) на основу података датих у табели 1.
- 7.2 (2 п) Израчунај инклинацију (i) под којом видимо галаксију UGC 2885.
- 7.3 (5 п) Анализом слике 2, пронађи брзину којом се галаксија UGC 2885 удаљава од Земље (v).
- 7.4 (2 п) Одреди растојање $D[\text{Мрс}]$ до галаксије UGC 2885.
- 7.5 (20 п) Анализом слике 2, и решавањем једначине (3), израчунај масу неутралног водоника (M_{HI}) у галаксији UGC 2885.
- 7.6 (2 п) Уколико ти је познато да је $M_{gas} = 1,33 \cdot M_{HI}$, израчунај укупну масу гаса у овој галаксији.
- 7.7 (20 п) Израчунај ротациону брзину галаксије (v_{rot}).
- 7.8 (2 п) Израчунај барионску масу галаксије (M_b).
- 7.9 (2 п) Израчунај масу звезда у галаксији UGC 2885.
- 7.10 (20 п) Израчунај укупну масу галаксије (M).
- 7.11 (5 п) Израчунај однос укупне масе и барионске масе галаксије $n = \frac{M}{M_b}$.

8 Решења

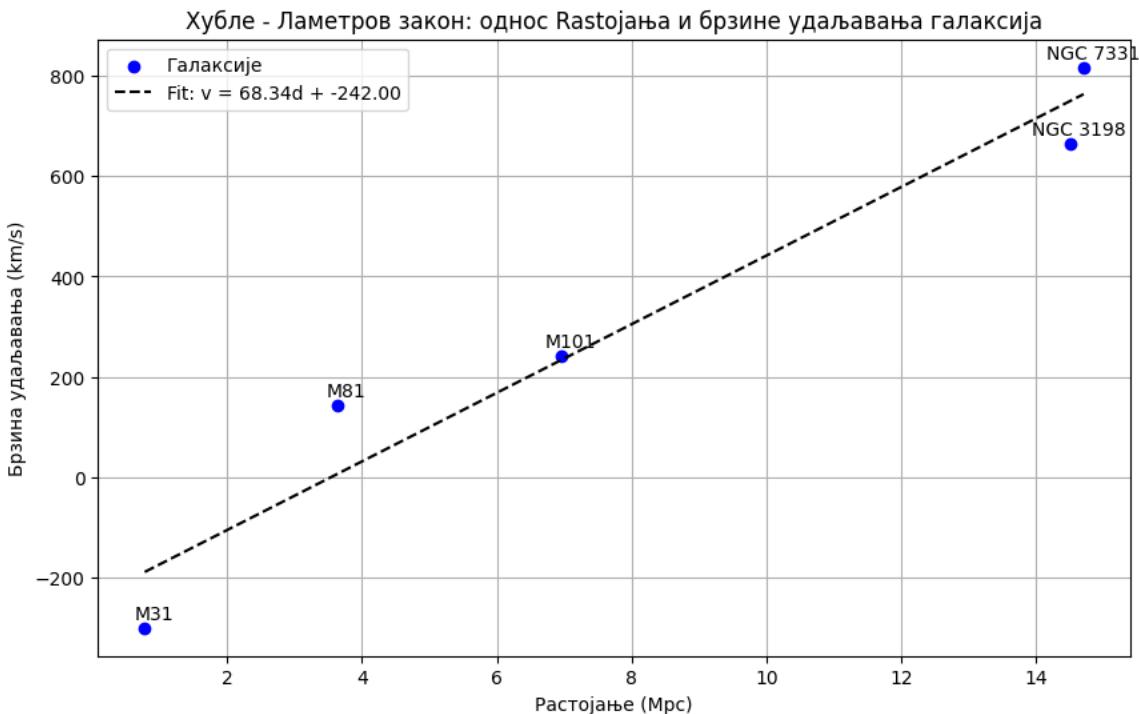
8.1 (20 п) Израчунај вредност Хабловог параметра (H_0) на основу података датих у табели 1.

У овом задатку, потребно је да такмичари/ке израчунају (H_0), квалитет као и испртавање графика се не бодује посебно.

Уколико ученици искористе метод најмањих квадрата метод бодовати са 10 поена.

Уколико ученици искористе мање прецизан метод, а који их доводи до математички симисленог резултата, попут одређивања једначине праве кроз две тачке, то бодовати са 5 поена.

Референтни фит је представљен на слици 3, док је референтна вредност за H_0 представљена релацијом 9. За фитовање ових података, односно рачунање, коришћена је пирпту библиотека пирпту.plofit.



Слика 3: Хабл - Ламетров закон: однос растојања и брзине удаљавања галаксија

На основу претходног графика добија се:

$$H_0 = 68,34 \frac{\text{km}}{\text{Mpc} \cdot \text{s}} \quad (7)$$

Расподела поена под условом да ученик представи метод израчунавања:

$$\begin{aligned}H_0 \in [67, 69] &\rightarrow (5 \text{ p}) \\H_0 \in [63, 67] \cap (69, 73] &\rightarrow (4 \text{ p}) \\H_0 \in [59, 63) \cap (73, 77] &\rightarrow (3 \text{ p}) \\H_0 \in [55, 69) \cap (77, 81] &\rightarrow (2 \text{ p}) \\H_0 < 55 \vee H_0 > 81 &\rightarrow (1 \text{ p})\end{aligned}$$

Уколико ученик/ца не представи метод већ само упише вредност, овај део задатка се бодује са 0 поена. Ово је обавезан услов јер је вредност за Хаблов параметар дата у константама који се достављају кандидатима/кињама.

8.2 (2 п)Израчунај инклинацију (i) под којом видимо галаксију UGC 2885.

Заменом познатих вредности у једначину 2, добија се:

$$\begin{aligned}\cos i &= \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - q_0^2}{1 - q_0^2}} \\ \cos i &= 0,66 \\ i &= \arccos(0,66) \\ i &= 1,16 \text{ [rad]} \\ i &= 66,4^\circ\end{aligned}\tag{8}$$

Уколико је $i \in [63, 4, 69, 4]$, задатак бодовати са (2 p) у сваком другом случају, задатак бодовати са (0 p).

8.3 (5 п) Анализом слике 2, пронађи брзину којом се галаксија UGC 2885 удаљава од Земље (v).

У овом делу задатка такмичар/ка треба да препозна да брзина удаљавања највише одговара вредности на средини галаксије. Средина галаксије је одређена на основу растојања између два пика, која представљају доплеров помак видљивог услед ротације галаксије.

$$v = 5800 \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} v \in [5750, 5850] \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right] &\rightarrow (5 \text{ p}) \\ v \in [5700, 5750) \cap (5850, 5900] \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right] &\rightarrow (2 \text{ p}) \\ v < 5700 \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right] \vee v > 5900 \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right] &\rightarrow (0 \text{ p}) \end{aligned}$$

8.4 (2 п) Одреди растојање D [Mpc] до галаксије UGC 2885.

Из једначине 1 следи:

$$\begin{aligned} D &= \frac{v}{H_0} \\ D &= 84,87 \text{ [Mpc]} \end{aligned}$$

Уколико је $D \in [80, 90]$ [Mpc] ученику/ци доделити свих 2 поена у сваком другом случају, дати 0 поена.

8.5 (20 п) Анализом слике 2, и решавањем једначине (3), израчуј масу неутралног водоника (M_{HI}) у галаксији UGC 2885.

У овом делу задатка кандидат/киња треба да препозна, да је могуће израчунати приближну вредност за укупан флукс тако што израчуна суму свих правоугаоника који се налазе унутар површине (или мало излазе изнад површине под плавом линијом) а чије ја појединачна површина $s = 5 \cdot 50 \left[\frac{\text{mJy}\cdot\text{km}}{\text{s}} \right]$.

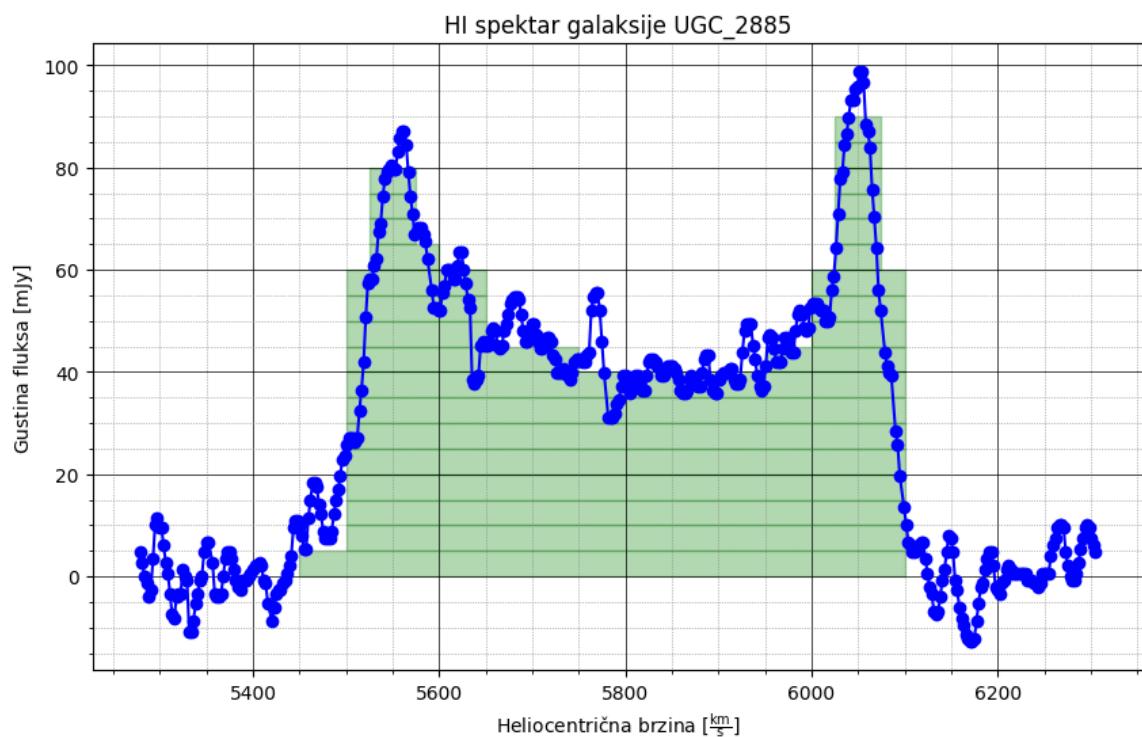
Уколико ученик/ца препозна да треба да користи правоугаонике, површине s за рачунање укупног флукса доделити **15 поена**.

На слици 4 је представљен, референтни одброј правоугаоника који представља најприближну површину која одговара нумеричкој вредности овог интеграла.

У овом одброју избројано је $n = 130$ правоугаоника а чија је површина једнака s .

Решавањем једначине 3 добија се:

$$\begin{aligned} \left(\frac{M_{HI}}{M_{\odot}} \right) &\sim 2,36 \cdot 10^5 \cdot 84,87^2 \cdot 10^{-3} \cdot n \cdot s \\ \left(\frac{M_{HI}}{M_{\odot}} \right) &\sim 5,5 \cdot 10^{10} \\ M_{HI} &= 5,5 \cdot 10^{10} \cdot M_{\odot} \end{aligned}$$



Слика 4: Приближан укупни флукс, примењено на HI спектар галаксије UGC 2885.

Бодовање у наредном делу задатка је скалирано према одброју броја правоугаоника (n) што директно утиче на израчунату масу:

$$n \in [125, 135] \rightarrow \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_\odot} \in [5, 3, 5, 7] \rightarrow (5 \text{ p})$$

$$n \in [120, 125) \vee n \in (135, 140] \rightarrow \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_\odot} \in [5, 09, 5, 3) \vee \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_\odot} \in (5, 7, 5, 95] \rightarrow (4 \text{ p})$$

$$n \in [100, 120) \vee n \in (140, 160] \rightarrow \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_\odot} \in [4, 24, 5, 09) \vee \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_\odot} \in (5, 95, 6, 08] \rightarrow (3 \text{ p})$$

$$n \notin [100, 160] \rightarrow \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_\odot} \notin [4, 24, 6, 08] \rightarrow (2 \text{ p})$$

8.6 (2 п) Уколико је познато да је $M_{gas} = 1,33 \cdot M_{HI}$, израчунај укупну масу гаса у овој галаксији.

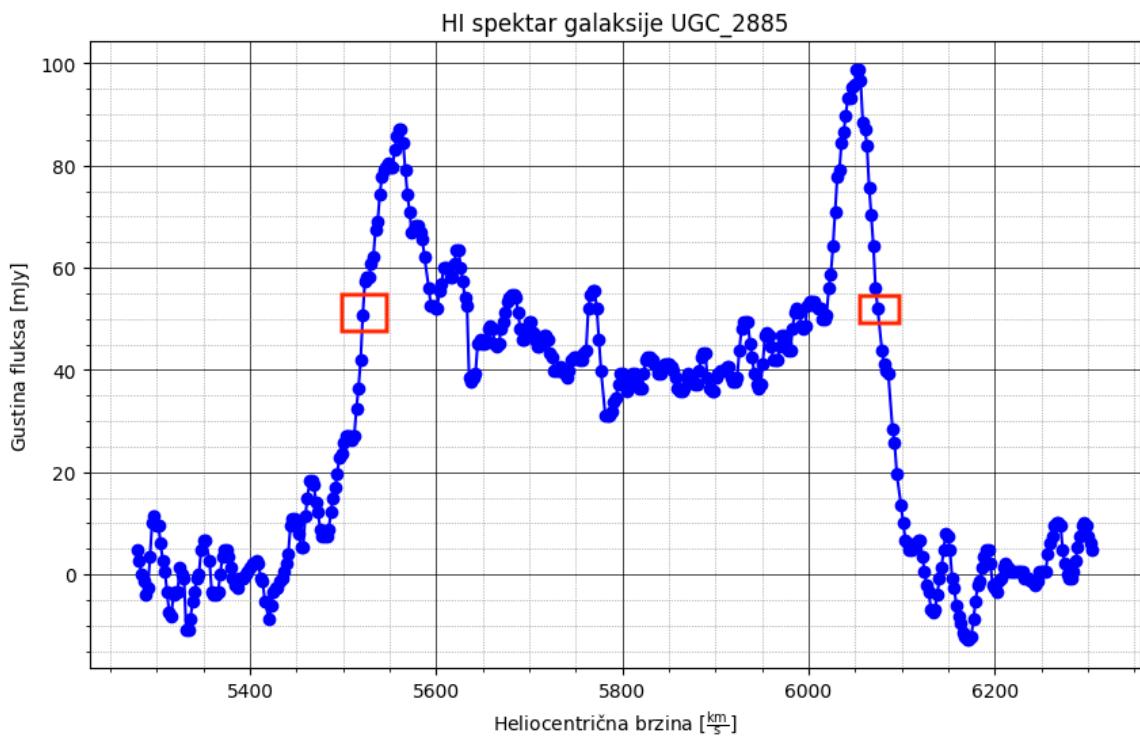
Према једначини, добија се да је:

$$M_{gas} = 7,35 \cdot 10^{10} M_\odot$$

Уколико је $\frac{M_{gas}}{10^{10} \cdot M_\odot} \in [6, 9]$ доделити свих 2 поена у супротном а ако примени поступак доделити 1 поен.

8.7 (20 п) Израчунај ротациону брзину галаксије (v_{rot}).

У овом задатку потребно је препознati да максимални интензитет износи $F_{max} = 100 \text{ mJy}$, одакле следи да средина на половини максимума одговара $F_{FWHM} = 50 \text{ mJy}$. Сада је потребно пронаћи два податка која су најприближнија овој вредности (слика 5).



Слика 5: Приближно одређивање података најближих F_{FWHM} .

Одакле се могу приближно одредити вредности интензитета хелиоцентричних брзина за ова два податка.

$$v_1 \in [5500, 5550] \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right]$$

$$v_2 \in [6150, 6200] \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right]$$

За овако одабране вредности брзина доделити (8 р) у сваком другом случају , а ако примени поступак доделити, (1 р). Овај део бодовања се односи и на разумевање појма, половина на висини максимума, тако да уколико ученик/ца опише са разумвењем, или то испрта бодовати са 5 поена.

$$W_{50} = v_2 - v_1 \rightarrow (7 \text{ p})$$

$$W_{50} = 6075 \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right] - 5525 \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right] \quad (10)$$

$$W_{50} = 550 \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right]$$

Уколико за резултат важи, $W_{50} = 550 \pm 50 \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right]$ тада доделити 2 поена, ако резултат не буде у том интервалу ученицима/цама, а применили су поступак доделити 1 поен.

Из једначине 6 сада следи:

$$v_{rot} = \frac{W_{50}}{2 \cdot \sin i}$$
$$v_{rot} = \frac{550}{2 \cdot \sin(66, 4^\circ)}$$
$$v_{rot} = 299, 95 \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right]$$

Уколико је $v_{rot} \in [280, 320] \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right]$, ученику/ци доделити 3 поена, у супротном и уколико има поступак доделити 1 поена.

8.8 (2 п) Израчунај барионску масу галаксије (M_b).

Према релацији 5, добија се:

$$M_b = 50 \cdot 299,95^4 M_\odot$$

$$M_b = 4,05 \cdot 10^{11} M_\odot$$

Уколико је $\frac{M_b}{10^{11} M_\odot} \in [3, 5]$, ученику/ци доделити 2 поена, у супротном уз поступак доделити 1 поен.

8.9 (2 п) Израчунај масу звезда у галаксији UGC 2885.

Према поставци задатка имамо да је:

$$M_* = M_b - M_{gas}$$

$$M_* = 40,5 \cdot 10^{10} M_\odot - 7,35 \cdot 10^{10} M_\odot$$

$$M_* = 33,15 \cdot 10^{10} M_\odot$$

Уколико је $\frac{M_*}{10^{10} M_\odot} \in [29, 37]$, ученику/ци доделити 2 поена, у супротном уз поступак доделити 1 поен.

8.10 (20 п) Израчунај укупну масу галаксије (M).

Ученик/ца треба да се сети да му је дата велика оса галаксије (a). Користећи се овим податком могуће је израчунати дијаметар (d) галаксије:

$$a = \frac{2d}{D} \rightarrow (5 \text{ p})$$

$$2d = a \cdot D$$

$$2d = 0,0016[\text{rad}] \cdot 84\text{Mpc}$$

$$2d = 134,4\text{Kpc}$$

$$d = 67\text{Kpc}$$

Уколико је $d \in [50, 83] \text{ [Kpc]}$ ученику/ци дати 5 поена, у супротном уз поступак доделити 2 поена.

Када ово израчуна ученик/ца треба да се сети **Теореме Виријала**:

$$\begin{aligned} 2K + U &= 0 \rightarrow (5 \text{ p}) \\ K &= -\frac{U}{2} \end{aligned} \tag{11}$$

Уколико нам је такође познато да:

$$\begin{aligned} K &= \frac{mv^2}{2} \\ U &= -\frac{GMm}{2d} \rightarrow (3 \text{ p}) \end{aligned} \tag{12}$$

Заменом једначина 12 у једначине 11 добија се:

$$\begin{aligned} M &= \frac{v^2 \cdot d}{G} \rightarrow (5 \text{ p}) \\ M &= 2,69 \cdot 10^{42} [\text{kg}] \\ M &= 1,34 \cdot 10^{12} M_{\odot} \end{aligned}$$

Уколико је ученик/ца израчунао/ла до на ред величине, дати и на овом делу 2 поена у супротном, ако је испунио/ла рачун доделити 1 поен.

8.11 (5 п) Израчунај однос укупне масе и барионске масе галаксије $n = \frac{M}{M_b}$.

Једноставно следи:

$$\begin{aligned} n &= \frac{M}{M_b} \\ n &= \frac{1,34 \cdot 10^{12} M_{\odot}}{4,05 \cdot 10^{11} M_{\odot}} \\ n &= 3,3 \end{aligned} \tag{13}$$

Уколико је ученик/ца израчунао/ла до на ред величине, дати и на овом делу 5 поена у супротном, ако је испунио/ла рачун доделити 1 поен.