The Society of Astronomers of Serbia

Друштво астронома Србије

Друштво астронома Србије
Волгина 7, 11060 Београд
http://www.das.org.rs

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА ТЕОРИЈСКИ ДЕО
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ АСТРОНОМИЈЕ
29.04.2026. год.

ЗАДАЦИ СА РЕШЕЊИМА

1. **[20 поена]** Наслућује се да се иза Плутонове путање креће мноштво крупних астероида и језгара комета (Кајперов појас). Астрономи желе да посматрају астероид "X"у Кајперовом појасу пречника 350 km, са албедом $p = 0{,}07$. Пошто је посматрано тело веома далеко, сматрати да су његово растојање од Сунца и растојање од Земље приближно једнаки и да износе 100 AJ. Претпоставити да астероид и Месец рефлектују Сунчеву светлост слично идеалном дифузном рефлектору, са различитим албедом. Код астероида занемарити фазне ефекте. Израчунајте привидну величину астероида X и одговорите на питање да ли астрономи могу да га посматрају помоћу телескопа на Земљи чија је гранична осетљивост 24 магнитуде.

Решење:

Главна идеја у овом задатку је да се сјај астероида пореди са сјајем пуног Месеца. Из списка константи имамо вредности за Месечев албедо, удаљеност Месеца од Земље, као и његов пречник. **[3 п.]**

Записаћемо Погсонов закон за Месец и астероид:

$$m_\mathrm{a} - m_\mathrm{M} = -2.5 \log \frac{E_\mathrm{a}}{E_\mathrm{M}} \ ,$$

где су E_M и E_a осветљености на Земљи које долазе са Месеца и астероида. **[2 п.]**

Флукс зрачења Сунца на растојању Месеца је:

$$\Phi_\mathrm{M} = \frac{L_\odot}{4\pi d_{SM}^2} S_M \ ,$$

где је $d_{SM} \simeq 1$AJ, растојање Сунце-Месец, а S_M је површина Месечевог диска. **[2 п.]**

Аналогно, флукс зрачења Сунца на растојању астероида је:

$$\Phi_{\mathrm{a}} = \frac{L_\odot}{4\pi d_a^2} S_a \ ,$$ **[2 п.]**

где је $d_a = 100$ АЈ, растојање Земља-астероид, S_a површина диска астероида.

Осветљеност која ће стићи на Земљу са Месеца је:

$$E_M = \frac{\Phi_M \, p_M}{4\pi d_{ZM}^2} = \frac{L_\odot}{4\pi d_{SM}^2} \cdot p_M \cdot \frac{S_M}{4\pi d_{ZM}^2}.$$ **[2 п.]**

Слично, осветљеност која ће стићи на Земљу са астероида је:

$$E_a = \frac{\Phi_a \, p_a}{4\pi d_a^2} = \frac{L_\odot}{4\pi d_a^2} \, p_a \cdot \frac{S_a}{4\pi d_a^2}$$ **[2 п.]**

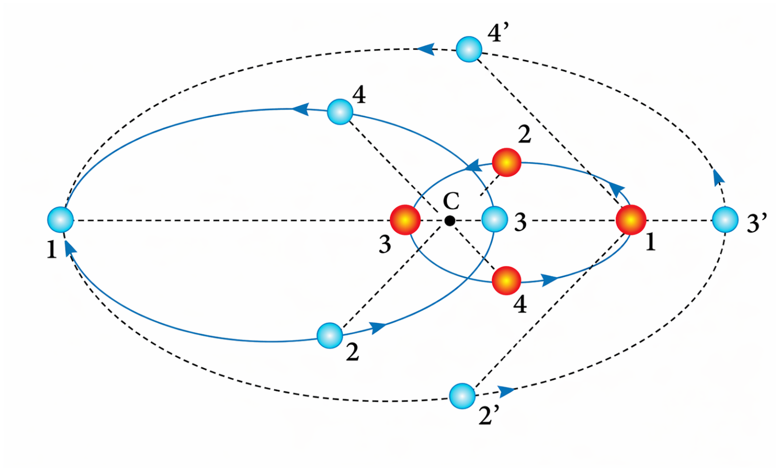
Односи површина Месеца и астероида које рефлектују Сунчеву светлост су сразмерни квадрату њихових полупречника.
На крају добијамо разлику у магнитудама астероида и пуног Месеца:

$$m_a - m_M = -2.5 \log \left[\left(\frac{R_a}{R_M} \right)^2 \left(\frac{d_{SM}}{d_a} \right)^2 \left(\frac{d_{ZM}}{d_a} \right)^2 \left(\frac{p_a}{p_M} \right) \right]$$ **[3 п.]**

Заменом бројних вредности добија се да је $m_{\mathrm{a}} - m_{\mathrm{M}} \approx 38,69$, што значи да је привидна магнитуда астероида 25,35, што је испод прага осетљивости телескопа. Астероид неће моћи да се види. **[4 п.]**

2. **[20 поена]** Визуелно двојна звезда је удаљена 10 парсека од нас, и видимо је нормално у односу на орбиталну раван звезда. Највеће угаоно растојање између звезда је 7 лучних секунди, а најмање 1 лучну секунду. Период ротације система је 100 година. Израчунајте укупну масу звезда у овом двојном систему, у јединицама масе Сунца.

Решење:



Слика 1: Орбите звезда у двојном систему око заједничког центра маса (пуна линија) и релативна орбита (испрекидана линија) мање масиве звезде (плави кружић) око масивније звезде (црвени кружић)

Први део задатка може се решити са добро нацртане скице. На Слици 1. приказане су путање звезда у овом двојном систему. Може се уочити да је највеће растојање између компоненти $p_1 = 7''$ (положаји 1) једнако једнако двоструком збиру великих полуоса, умањено за најмање растојање мођу компонентама $p_3 = 1''$ (положаји 3), па је $p_1 = 2a_1 + 2a_2 - p_3$. Одатле се добија да је $a = a_1 + a_2 = 4''$. **[12 п.]**

Како знамо удаљеност до овог двојног система, можемо да израчунамо колико је a у астрономским јединицама. **[2 п.]**

$$a = 4'' \cdot 10\text{pc} = 40 \text{ AJ}$$

Затим користећи Кеплеров закон за двојне системе, где је $a = a_1 + a_2$ релативна путања једне звезде око друге изражена у астрономским јединицама, а период система у годинама, добијамо збир масе обе компоненте система у јединицама Сунчевих маса. **[6 п.]**

$$m_1 + m_2 = \frac{a^3}{T^2} = 6.4\text{M}_\odot$$

3. **[20 поена]** Астроном иде возом од Београда ($\varphi_1 = 44°49'14''$, $\lambda_1 = 1^h21^m51^s$) до Берлина ($\varphi_2 = 51°31'12''$, $\lambda_2 = 0^h53^m37^s$). Природно, интересантна му је *геометрија* путовања.

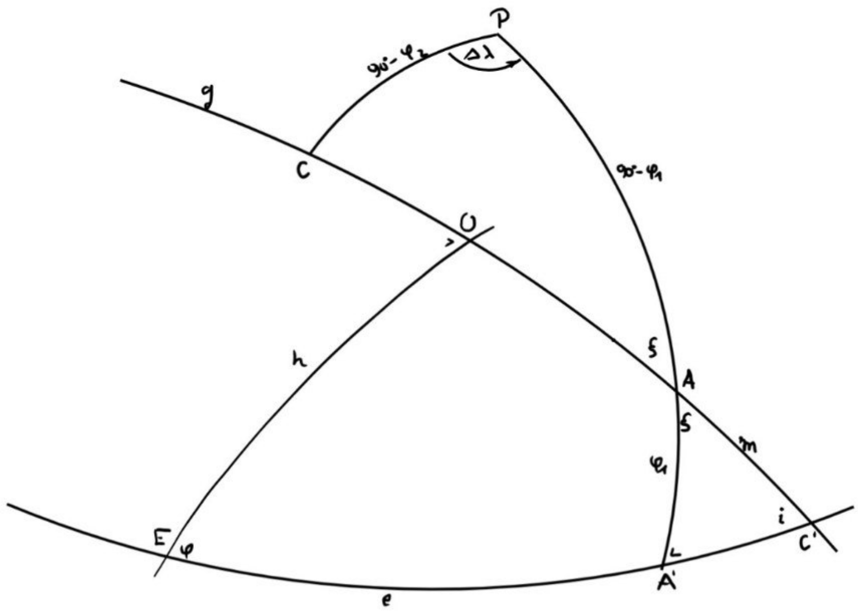
а) Прво што га занима је која је најсевернија тачка на Земљиној површи која је једнако удаљена од Берлина и Београда, тј. треба израчунати географску ширину те тачке.

б) Даље, уз помоћ нађене географске ширине, треба израчунати азимут залаза звезде Ригел (β Orionis) за коју су познате ректасцензија и деклинација: $\alpha = 5^h14^m32^s$ и $\delta = -8°12'6''$.

в) Астроном, на почетку путовања, опажа да се воз креће 80 km на час у правцу северозапада. Одредите приближне часовне промене географских координата воза који је кренуо из Београда? Додатно, да ли можете да покажете када ће важити да је $\Delta\varphi > \Delta\lambda$?

Решење

а) Прво што је потребно урадити је наћи даљину l између Београда и Берлина.



Слика 2: Приказани су екватор e, велики круг g који спаја Берлин (тачка C) и Београд (тачка A), те велики круг h који пролази кроз средину O лука AC и нормалан је на g.

Применом косинусног обрасца на сферни троугао ΔAPC имамо:

$$\cos l = \cos\left(90^\circ - \varphi_1\right)\cos\left(90^\circ - \varphi_2\right) + \sin\left(90^\circ - \varphi_1\right)\sin\left(90^\circ - \varphi_2\right)\cos\Delta\lambda$$

$$\iff l = \arccos\left[\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\left(|\lambda_2 - \lambda_1|\right)\right]$$

[2 п.]

Добијамо (географске дужине се претходно морају претворити у формат $[^\circ, ', '']$) да је $l = 8^\circ 10' 47''$.

За исти сферни троугао из синусног обрасца налазимо:

$$\frac{\sin\left(90^\circ - \varphi_2\right)}{\sin\xi} = \frac{\sin l}{\sin\Delta\lambda} \implies \xi = \arcsin\left(\frac{\cos\varphi_2 \sin\Delta\lambda}{\sin l}\right)$$

[1 п.]

Угао ξ износи $32^\circ 30' 27''$.

Даље, потребно је наћи угао i између екватора и великог круга g, што се може урадити преко косинусног обрасца за троугао $\Delta AA'C'$:

$$\cos i = -\cos\xi\cos 90^\circ + \sin\xi\sin 90^\circ\cos\varphi_1 = \implies i = \arccos\left(\sin\xi\cos\varphi_1\right)$$

[2 п.]

Угао i има вредност од $67^\circ 35' 32''$.

Тачке једнако удаљене од Београда и Берлина налазе се на великом кругу h који пролази кроз средиште O лука AC и нормалан је на g. Угао између великог круга h и екватора може се израчунати из троугла $\Delta EOC'$:

$$\cos\varphi = -\cos 90^\circ\cos i + \sin 90^\circ \sin i\cos\left(m + l/2\right) \implies$$

$$\varphi = \arccos\left[\sin i\cos\left(m + l/2\right)\right]$$

[1 п.]

Пошто нам недостаје вредност за m, њу можемо наћи из синусног обрасца за троугао $\Delta AA'C'$:

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin i} = \frac{\sin m}{\sin 90^\circ} \implies m = \arcsin\left(\frac{\sin\varphi_1}{\sin i}\right)$$

Добија се $m = 49^\circ 40' 53''$.

Уколико се сада вратимо на једнакост

$$\varphi = \arccos\left[\sin i\cos\left(m + l/2\right)\right]$$

следи да је

$$\varphi = 56^\circ 52' 50''$$

[2 п.]

Најсевернија тачка на великом кругу h налази се на географској ширини φ.

б) Азимут се мери од јужне тачке ка западу по конвенцији. У том случају, азимут залаза задате звезде на овој ширини можемо наћи ако напишемо косинусну теорему за паралактички сферни троугао:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi)\cos z + \sin(90^\circ - \varphi)\sin z \cos(180^\circ - A)$$

$$\Longleftrightarrow \ \sin\delta = \sin\varphi\cos z - \cos\varphi\sin z\cos A$$

одакле добијамо тражени азимут као: [5 п.]

$$A = \arccos\left(\frac{\sin\varphi\cos z - \sin\delta}{\cos\varphi\sin z}\right)$$

У случају залаза важи $z = 90^\circ$, те имамо поједностављење горњег израза:

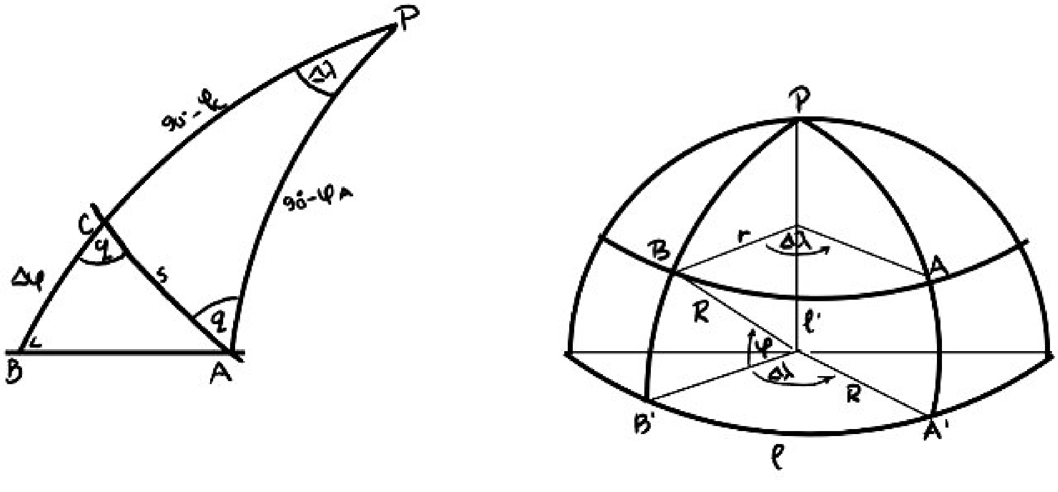
$$A = \arccos\left(-\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}\right) = 74^\circ 51' 54''.$$

Примећујемо да нам ректасцензија звезде није била потребна.

Напомена: Ако ученик узме да се азимут мери од севера ка истоку, добија се $A = 105,1$, даље то треба одузети од 360 и добија се $254^\circ 52'$.

в) Што се тиче приближних промена $\Delta\lambda$ и $\Delta\varphi$, прво посматрамо слику 3 (лево).

Видимо да је за Београд узето теме A. Северни пол је означен са P. Воз ће након сат времена стићи у теме C, и прећи неки пут s од 80 km. Воз се креће по великом кругу који са меридијаном Београда заклапа угао q. Померање s је мало у поређењу са димензијама Земље ($s \ll R_\oplus$), и Београд није близу северног пола - ово значи да троугао ΔABC можемо сматрати правоуглим раванским троуглом. [1 п.]



Слика 3: Скице потребна за одређивање приближних промена $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$.

У њему одмах можемо уочити странице $BC = \Delta\varphi$ и $AC = s$. Што се тиче странице AB, урадићемо додатно разматрање користећи слику 1 (десно). Важи да је $l = R\Delta\lambda$, односно $l = \Delta\lambda$ за $R \equiv 1$ (пошто радимо се са степенима). Такође, имамо $l' = r\Delta\lambda$. Може се наћи веза $r = R\cos\varphi = \cos\varphi$. Тада следи да је $l' = l\cos\varphi$. Односно, можемо тврдити да важи $AB = \Delta\lambda\cos\varphi$ (овде је φ географска ширина Београда). У троуглу ΔABC, код темена A имамо угао од $90° - q$, код темена B ће бити прав угао (пресек паралела и меридијана), те је онда угао код темена C просто q. **[1 п.]**

Сада можемо искористити основне тригонометријске зависности:

$$\sin q = \frac{AB}{AC} = \frac{\Delta\lambda\cos\varphi}{s} \implies \Delta\lambda = s \cdot \sin q \sec\varphi,$$

$$\cos q = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta\varphi}{s} \implies \Delta\varphi = s \cdot \cos q.$$

Према задатку, имамо угао $q = 45°$ и $s = 80\,\mathrm{km}$. Растојање пређено за један час морамо да конвертујемо у лучне минуте (секунде). Знамо да је обим Земље око $40000\,\mathrm{km}$ и да пун круг има $360°$ тако да се може писати да је $1° \approx 111.11\,\mathrm{km}$. Одатле, можемо извести да је $s = 43'12''$. Заменом у изразе изнад, добијамо: **[3 п.]**

$$\Delta\varphi = 30'33'',\ \Delta\lambda = 43'3''.$$

Што се тиче разматрања случаја да је $\Delta\varphi > \Delta\lambda$, можемо кренути од пара једначина које смо написали раније. Можемо обе једначине поделити са s и писати:

$$\Delta\varphi > \Delta\lambda \iff \cos q > \sin q \sec\varphi \iff$$

$$\iff \cos\varphi > \tan q \ (|\varphi| < 90°,\ 0 < q < 90°).$$

[2 п.]

Тзв. критични угао q_c, рачуна се преко $q_c = \arctan(\cos\varphi)$. Инкремент латитуде је већи од инкремента лонгитуде тачно кад је угао q мањи од q_c (тј. $\Delta\varphi > \Delta\lambda$ за $q < q_c$). За Београд, критични угао износи $q_c = 35°21'20''$.

4. **[20 поена]** Динамика хомогеног и изотропног универзума може бити описана Фридмановом једначином:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2},$$

где је Хаблов параметар дефинисан као $H = \dot{a}/a$. Ознака a представља космички димензиони фактор, а $\dot{a}$ је промена тог фактора у времену. Дакле, Хаблов параметар је функција космичког времена (није права константа). Овде ρ_m представља густину материје, а ρ_r густину зрачења. Са Λ је означена космолошка константа, а k је кривина простора. Са индексом 0 означава се данашња вредност неког параметра; нпр. H_0 је данашња вредност Хабловог параметра, тј. Хаблова константа.

а) Могуће је дефинисати карактеристичну временску скалу за ширење Универзума t_H, тј. Хаблово време, користећи Хаблов параметар. Израчунати t_{H0}.

б) Уколико дефинишемо критичну густину ρ_c као густину материје која је потребна да би се објаснило ширење равног унверзума без зрачења и енергије, наћи израз за ту критичну густину преко H и G. Израчунати ρ_{c0}.

в) Фридманова једначина се може другачије написати као:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1,$$

где су $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ бездимензиони параметри густине, тј. $i = (m, r)$. Наћи изразе за Ω_Λ и Ω_k, користећи H, c, Λ, k, a.

г) Фридманова једначина имплицира да се универзум шири, галаксије се померају једна од друге, што доводи до везе познате као Хабл-Леметров закон, чији општи облик можемо користити у случају кад је црвени помак $z \ll 1$. Пречкаста спирална галаксија $NGC\,1300$ има црвени помак од $z = 0.005$. Угаона величина пречке износи $3'$. Која је физичка величина пречке?

Решење:

а) Хаблово време се дефинише као:

$$t_H = \frac{1}{H} \implies t_{H0} = \frac{1}{H_0}$$

[5 п.]

Данашња вредност Хабловог параметра је $H_0 = 70\,\mathrm{km/s/Mpc}$, те следи да је $t_{H0} = 13,97\,\mathrm{Gyr}$.

б) Користећи Фридманову једначину критична густина се може наћи преко:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c \implies \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Данашњу вредност за критичну густину налазимо преко: **[5 п.]**

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 9,21 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/m^3}$$

в) Из једначине:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$$

следи:

$$\frac{\rho_m}{\rho_c} + \frac{\rho_r}{\rho_c} + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$$

Даље имамо:

$$\frac{8\pi G}{3H^2}(\rho_m + \rho_r) + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$$

одакле добијамо: **[5 п.]**

$$\frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) + \Omega_\Lambda H^2 + \Omega_k H^2 = H^2$$

Ако ову једначину упоредимо са оригиналним записом Фридманове једначине $H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$, налазимо тражене изразе:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{a^2 H^2}$$

г) За црвени помак $z = 0,005$ може се користити Хаблов закон:

$$d = \frac{cz}{H_0} = \frac{3 \cdot 10^5\,\mathrm{km/s} \cdot 0.005}{70\,\mathrm{km/s/Mpc}} \approx 21,4\,\mathrm{Mpc}$$

Да бисмо нашли реалну величину пречке, можемо користити релацију $l = d\theta$, уз то да је θ претворено у радијане као: **[5 п.]**

$$\theta = 3' = \frac{3}{60} \cdot \frac{\pi}{180} = 8,73 \cdot 10^{-4}\mathrm{rad}$$

Сада налазимо да је тражена величина:

$$l = 21.4\,\mathrm{Mpc} \cdot 8.73 \cdot 10^{-4} \approx 18,7\,\mathrm{kpc}$$

5. **[20 поена]** Астрономи посматрају спектроскопски двојни систем који се састоји од масивне плаве звезде и компактног пратиоца. Мерењем спектра плаве звезде утврђено је да се линија водоника $H\alpha$ ($\lambda_0 = 656{,}3\,\mathrm{nm}$) периодично помера услед орбиталног кретања. У тренутку максималног удаљавања звезде од Земље измерена је таласна дужина $\lambda = 728{,}5\,\mathrm{nm}$. Познато је да је орбита кружна и да је раван орбите паралелна линији визуре. Период орбиталног кретања износи $P = 1{,}5$ дана.

а) Израчунајте параметар црвеног помака z за ову звезду.

б) Користећи релативистичку формулу, израчунајте орбиталну брзину звезде v_{rad} у km/s.

в) На основу брзине и периода, израчунајте полупречник орбите ове звезде R_{orb} око центра масе система (изразити у милионима километара).

Решење:

а) Параметар црвеног помака (z) једнак је:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$ **[2 п.]**

$$z = \frac{728,5 - 656,3}{656,3} = \frac{72,2}{656,3} \approx \mathbf{0,11}$$ **[3 п.]**

б) Орбитална брзина звезде

Пошто брзина није занемарљиво мала у односу на брзину светлости, користимо релативистичку Доплерову формулу

$$1 + z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \qquad \beta = \frac{v}{c}.$$ **[4 п.]**

Квадрирањем добијамо

$$(1+z)^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta},$$

одакле следи

$$\beta = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}.$$

За $z \approx 0,11$ добијамо

$$\beta = \frac{1{,}232 - 1}{1{,}232 + 1} = \frac{0{,}232}{2{,}232} \approx 0{,}104.$$

Одатле је орбитална брзина звезде [5 **п.**]

$$v = \beta c \approx 0{,}104 \cdot 299\,792\,458\,\mathrm{m/s} \approx 3{,}12 \times 10^4\,\mathrm{km/s}.$$

в) Полупречник орбите звезде

За кружно кретање важи

$$v = \frac{2\pi R_{orb}}{P} \implies R_{orb} = \frac{v \cdot P}{2\pi}$$ [**2 п.**]

Битно је изразити период у секундама и брзину у км/с, тј. јединице морају бити међусобно усклађене (може период у данима, а брзина км/дану). Период орбиталног кретања у секундама износи

$$P = 1{,}5 \cdot 24 \cdot 3600 = 129\,600\,\mathrm{s}.$$

Убацивањем вредности добијамо [**4 п.**]

$$R_{\mathrm{orb}} = \frac{3{,}12 \times 10^4 \cdot 129600}{2\pi}\,\mathrm{km} \approx 6{,}43 \times 10^8\,\mathrm{km}.$$