The Society of Astronomers of Serbia

Друштво астрономa Србије

Друштво астронома Србије
Волгина 7, 11060 Београд
http://www.das.org.rs

ЗАДАЦИ ЗА ТЕОРИЈСКИ ДЕО ЗА РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ АСТРОНОМИЈЕ 1-2. јун 2024. године

1 Задаци

(100п)

1. Астроном аматер из Београда треба да отпутује на Малту (Ла Валета $\lambda = 14°30'51''$ исток, $\varphi = 35°53'57''$). Хоће и онде да посматра звезде, чим се заврши астрономски сумрак. Његов авион полеће из Београда у 16 часова (средњоевропско време +1 час). Према његовој процени лет и све формалности ће му одузети око пет часова. Да ли ће моћи да оствари своју намеру, да почне да посматра на самом крају астрономског сумрака? Тога дана је временско изједначење $\eta = 12,5^s$, деклинација Сунца $\delta_\odot = 10°13'20''$. На Малти је званично време исто као у Београду. **(20п)**

2. Када се налази у зениту, пун Месец на Земљиној површини даје осветљеност $E_0 = 0,32$lx. Узимајући у обзир да атмосфера апсорбује $k = 23\%$ упадног зрачења, одредити сјај Месечевог диска B. Даљина до Месеца износи $r = 384\,400$km, а полупречник сателита је $R = 1\,738$km. **(20п)**

3. Извести формулу за укупну привидну величину система од n звезда, ако су привидне величине компонената $m_1, m_2, \dots m_n$. Како гласи формула у специјалном случају када су све компоненте исте привидне величине $m = m_1 = m_2 = \cdots = m_n$? **(20п)**

4. Одредити однос луминозности компонената у еклипсно двојном систему ако су познати њихови полупречници $R_A = 1,39 \cdot 10^9$m и $R_B = 0,90 \cdot 10^9$m и привидне величине $m_{\max} = 5,545$, $m_{p\min} = 5,990$, и $m_{s\min} = 5,790$. **(20п)**

5. Пензиас и Вилсон открили су 1965. године позадинско реликтно зрачење. То зрачење емитовано је у тренутку када је васиона постала прозрачна. Његова расподела одговара Пlанковој расподели на температури $3K$.

   а) Како се мења енергија фотона фреквенције ν уколико зрачење показује црвени помак z?

   б) Како космички црвени помак одговара смањењу енергије фотона и с којом се релативном брзином креће извор позадинског зрачења, ако је зрачење емитовано при температури од $4000K$?

   ц) Колика је брзина Земље према центру сферне љуске која представља извор зрачења, ако је у смеру Земљиног кретања температура која одговара израченој већа за $3,5mK$?

   Однос фреквенције на којој је зрачење максимално и температуре је $5,86 \cdot 10^{10}\mathrm{Hz/K}$.
   (20п)

РЕШЕЊА

1. Астроном аматер из Београда треба да отпутује на Малту (Ла Валета $\lambda = 14°30'51''$ исток, $\varphi = 35°53'57''$). Хоће и онде да посматра звезде, чим се заврши астрономски сумрак. Његов авион полеће из Београда у 16 часова (средњоевропско време +1 час). Према његовој процени лет и све формалности ће му одузети око пет часова. Да ли ће моћи да оствари своју намеру, да почне да посматра на самом крају астрономског сумрака? Тога дана је временско изједначење $\eta = 12,5^s$, деклинација Сунца $\delta_\odot = 10°13'20''$. На Малти је званично време исто као у Београду. **(20п)**

   Одговор:

   Треба одредити када се Сунце налази 18° испод хоризонта (то је тренутак краја астрономског сумрака) датог дана на Малти. У ту сврху ће послужити Гаусова група образаца (сферна тригонометрија, дато у таблицама па се формуле не бодују). Прилагођена за прелаз са хоризонтских координата на месне екваторске она гласи

$$
\begin{aligned}
&\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\phi \cos t,\\
&\cos A \sin h = \cos\delta \sin t,\\
&\cos A \cos h = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   Сада рачунамо тренутак краја астрономског сумрака, а то је када је $h_\odot = -18°$, а азимут A није од значаја. Овде користимо прву једначину коју решавамо по $\cos t$. Добија се: $\cos t = -0,518164$. **(5п)**

   Косинус је негативан у другом ($6^h < t < 12^h$) и трећем квадранту ($12^h < t < 18^h$). Пошто се ради о крају астрономског сумрака, мора бити западна небеска хемисфера, значи други квадрант следи да је $t = 8^h4^m50,2^s$. **(5п)**

   С обзиром на то да је небеско тело Сунце ово је право време. Применом поправки, тј. одузимањем временског изједначења и додавањем 12^h за месно средње време се добија $t_l = 20^h4^m37,7^s$ **(5п)**.

   Прелаз на зонско време (средњоевропско) по формули

$$
\begin{aligned}
\Delta\lambda &= 0°29'9''\\
\frac{\Delta\lambda}{360} &= \frac{\Delta t}{24}\\
\Delta t &= 1^m56,6^s
\end{aligned}
\tag{2}
$$

   даје $t_z = 20^h6^m34,3^s$ и, пошто се примењује летње време, додаје се још један час, дакле тражени тренутак ће бити тренутак краја астрономског сумрака у Ла Валети је $t_p = 21^h6^m34,3^s$, а толико показује и часовник у Београду. То значи $5^h6^m34,3^s$ после полетања авиона, што се може заокруглити на 5 часова. Дакле наш астроном аматер је сасвим правилно проценио време. **(5п)**

2. Када се налази у зениту, пун Месец на Земљиној површини даје осветљеност $E_0 = 0,32\mathrm{lx}$. Узимајући у обзир да атмосфера апсорбује $k = 23\%$ упадног зрачења, одредити сјај Месечевог диска B. Даљина до Месеца износи $r = 384\,400\mathrm{km}$, а полупречник сателита је $R = 1\,738\mathrm{km}$.

   Одговор:

   Осветљеност на површини Земље (са урачунатим ефектом апсорпције) означићемо са E_0, а осветљеност ван атмосфере (без апсорпције) са E. Веза ових величина је

$$E_0 = (1 - k)E \tag{3}$$

   где је k коефицијент који говори колики је део од упадног зрачења апсорбован у атмосфери. **(5п)**

   За случај коначног извора (извора чију површину можемо да видимо, али ипак је довољно далеко да можемо сматрати како су зраци који од њега долазе паралелни, а тачке на његовој површини једнако удаљене од посматрача) можемо да применимо формулу

$$E = B \cdot \omega \tag{4}$$

   која повезује осветљеност коју извор даје E са сјајем извора B и просторним углом под којим се извор види ω. **(5п)**

   Добијамо

$$B = \frac{E_o}{(1 - k)\omega} \tag{5}$$

   Просторни угао под којим се види Месец једнак је

$$\omega = \frac{4\pi R^2}{r^2}\,. \tag{6}$$

   Дакле сјај извора добијамо из једначине:

$$B = \frac{E_0 r^2}{4\pi R^2(1 - k)}\,. \tag{7}$$

   (5п)

   Заменом бројних вредности добијамо коначан резултат

$$B = 1618\frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2}\,. \tag{8}$$

   (5п)

   Напомена: У задатку је коришћена вредност $k = 23\%$ која се односи на правац ка зениту. За све друге правце апсорпција је већа, а осветљеност се смањује. Такође, треба водити рачуна о углу под којим се површина види са извора. Када се извор налази у зениту, претпостављамо да је површина пријемника нормална на правац упадних зрака.

3. Извести формулу за укупну привидну величину система од n звезда, ако су привидне величине компонената $m_1, m_2, \dots m_n$. Како гласи формула у специјалном случају када су све компоненте исте привидне величине $m = m_1 = m_2 = \cdots = m_n$?

Одговор:

Укупна осветљеност је дата као:

$$E_{uk} = E_1 + E_2 \cdots + E_n \tag{9}$$

(2п)

Сетимо се сада Погсоновог закона:

$$\begin{aligned} m_2 &= m_1 + 2,5 \log \frac{E_1}{E_2} \\ E_2 &= E_1 \cdot 10^{-0,4 \cdot (m_2 - m_1)} \end{aligned} \tag{10}$$

(5п)

Уколико сада представимо сваку осветљеност (од E_2 до E_n), преко осветљености E_1, добија се:

$$\begin{aligned} E_{uk} &= E_1 (1 + 10^{-0,4 \cdot (m_2 - m_1)} + \cdots + 10^{-0,4 (m_n - m_1)}) \\ m_1 - m_{uk} &= 2,5 \log \frac{E_{uk}}{E_1} = 2,5 \log \sum_{i=1}^{n} 10^{-0,4 (m_i - m_1)} \\ m_{uk} &= m_1 - 2,5 \log \sum_{i=1}^{n} 10^{-0,4 (m_i - m_1)} \end{aligned} \tag{11}$$

(8п)

Специјални случај имамо када су све звезде у скупу исте привидне величине m_1:

$$m_{uk} = m_1 - 2,5 \log n \tag{12}$$

(5п)

4. Одредити однос луминозности компонената у еклипсно двојном систему ако су познати њихови полупречници $R_A = 1,39 \cdot 10^9$m и $R_B = 0,90 \cdot 10^9$m и привидне величине $m_{\max} = 5,545$, $m_{\text{pmin}} = 5,990$, и $m_{\text{smin}} = 5,790$.

Одговор:

Уводимо следеће ознаке за осветљеност E (осветљеност која потиче од обе звезде), E_H (осветљеност од хладније звезде), E_T (осветљеност од топлије звезде, E_{pmin} (осветљеност у дубљем, примарном минимуму), E_{smin} (осветљеност у плићем, секундарном минимуму). Тада важи да је $E = E_H + E_T$. Затим уведимо ознаке за полупречнике R_M (полупречник мање звезде), R_V (полупречник веће звезде), R_T (полупречник топлије звезде), R_H (полупречник хладније звезде).

Током примарног минимума помрачена је топлија звезда, али ми не знамо да ли је сјајнија (тј. топлија) мања или већа звезда. Зато можемо да напишемо:

$$\begin{aligned} E_{pmin} &= E - \frac{R_M^2}{R_T^2} \cdot E_T \\ E_{pmin} &= E_H + (1 - \frac{R_M^2}{R_T^2}) \cdot E_T \end{aligned} \tag{13}$$

Последња једначина важи у оба случаја:

1) ако је топлија звезда мања: $\frac{R_M^2}{R_T^2} = 1$, $E_{pmin} = E - E_T$,

2) ако је топлија звезда већа: $\frac{R_M^2}{R_T^2}$ је једнако проценту површине веће звезде која се види, а $E_{pmin} = E - (\frac{R_M^2}{R_V^2})E_V$.

За време секундарног минимума помрачена је хладнија звезда. Поново имамо сличну једначину која важи у оба случаја:

$$\begin{aligned} E_{smin} &= E - \frac{R_M^2}{R_H^2} E_H \\ E_{smin} &= E_T + (1 - \frac{R_M^2}{R_H^2}) E_H \end{aligned} \tag{14}$$

(5п)

Уводимо сад смену $b = \frac{E_T}{E_H}$ и нађимо чему су једнаки односи укупне осветљености према осветљеностима у минимумима:

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_{pmin}} &= \frac{E_H + E_T}{E_{pmin}} \\ \frac{E}{E_{pmin}} &= \frac{E_H(1+b)}{E_H(1 + b(1 - \frac{R_M^2}{R_T^2}))} = \frac{1+b}{1 + b(1 - \frac{R_M^2}{R_T^2})} (*) \\ \frac{E}{E_{smin}} &= \frac{E_H + E_T}{E_{smin}} \\ \frac{E}{E_{smin}} &= \frac{E_H(1+b)}{E_H(1 + b - \frac{R_M^2}{R_H^2})} = \frac{1+b}{1 + b - \frac{R_M^2}{R_H^2}} (**) \end{aligned} \tag{15}$$

Сада можемо да применимо Погсонов закон:

$$\begin{aligned} m_{pmin} - m = 2,5log\frac{E}{E_{pmin}} = 5,990 - 5,545 = 0,445 \\ m_{smin} - m = 2,5log\frac{E}{E_{smin}} = 5,790 - 5,545 = 0,245 \end{aligned} \tag{16}$$

Одакле налазимо:

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_{pmin}} = 10^{0,4(m_{pmin}-m)} = 1,5066 \\ \frac{E}{E_{smin}} = 10^{0,4(m_{smin}-m)} = 1,2531 \end{aligned} \tag{17}$$

(5п)

Ако погледамо једначине (*) и (**) видимо да су нам леве стране познате а на десним имамо три непозната односа b, $\frac{R_M^2}{R_T^2}$ и $\frac{R_M^2}{R_H^2}$. Недостаје нам једна једначина за решавање овог система па смо принуђени да уведемо претпоставку да је мања звезда сјајнија (топлија), што значи $R_M = R_T$.

Имајући то у виду решавамо систем. Из прве једначине добијамо:

$$\frac{1+b}{1+b(1-1)} = 1+b = 1,5066 \Rightarrow b = 0,5066 \tag{18}$$

из друге једначине имамо:

$$\frac{1+b}{1+b-\frac{R_T^2}{R_H^2}} = 1,2531 \Rightarrow \frac{R_T}{R_H} = 0,55 \tag{19}$$

Када ово упоредимо са подацима који су нам дати у задатку налазимо:

$$\frac{R_M}{R_V} = 0,65 \neq \frac{R_T}{R_H} \tag{20}$$

Дакле, наша претпоставка била је погрешна, односно већа звезда је сјајнија па из тога следи да је $R_V = R_T$, а $R_M = R_H$. Решавање једначине (**) сада даје:

$$\frac{1+b}{1+b-1} = 1,2531 \Rightarrow b = 0,4 \tag{21}$$

Тражени однос луминозности једнак је односу одговарајућих осветљености јер се звезде налазе на једнаком растојању од посматрача:

$$\frac{L_V}{L_M} = \frac{L_T}{L_H} = \frac{E_T}{E_H} = b = 0,4 \tag{22}$$

(10п)

5. Пензиас и Вилсон открили су 1965. године позадинско реликтно зрачење. То зрачење емитовано је у тренутку када је васиона постала прозрачна. Његова расподела одговара Планковој расподели на температури $3K$.

а) Како се мења енергија фотона фреквенције ν уколико зрачење показује црвени помак z?

б) Како космички црвени помак одговара смањењу енергије фотона и с којом се релативном брзином креће извор позадинског зрачења, ако је зрачење емитовано при температури од $4000K$?

ц) Колика је брзина Земље према центру сферне љуске која представља извор зрачења, ако је у смеру Земљиног кретања температура која одговара израченој већа за $3,5mK$?

Однос фреквенције на којој је зрачење максимално и температуре је $5,86 \cdot 10^{10}$Hz/K.

Одговор:

а) Црвени помак је последица Доплеровог ефекта и изражава се као:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \tag{23}$$

где је λ_0 лабораторијска, а λ измерена вредност таласне дужине. Тражи се да нађемо промену енергије, па нам је згодније да пређемо на једначине по фреквенцији, $v = \frac{c}{\lambda}$:

$$z = \frac{\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0}}{\frac{c}{\nu}} = -\frac{\Delta\nu}{\nu} \tag{24}$$

Како је енергија фотона $E = h \cdot \nu$, губитак енергије биће једнак:

$$-\Delta E = -h\Delta\nu = Ez \tag{25}$$

(5п)

б) Према Виновом закону, на температури T максимум зрачења биће на фреквенцији ν једнакој:

$$\nu(Hz) = 5,86 \cdot 10^{10} T(K) \tag{26}$$

У тренутку емисије зрачења $T_0 = 4000K$, максимум је био на $\nu_0 = 2,34 \cdot 10^{14} Hz$, док за вредност температуре од $T = 3K$, добијамо $\nu = 1,76 \cdot 10^{11} Hz$. Према томе одговарајући црвени помак биће једнак:

$$z = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = 1330 \tag{27}$$

Брзину удаљавања сада лако налазимо као:

$$V = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} c = 0,99c \tag{28}$$

(10п)

ц) Због кретања Земље ка извору позадинског зрачења, из смера кретања ка Земљи долази зрачење које одговара за ΔT већој температури. Услед тога мења се фреквенција максимума спектра $\Delta\nu = 5,86 \cdot 10^{10} \cdot \Delta T$, следи да је $\Delta\nu = 2,05 \cdot 10^{8} Hz$. То је веома мала релативна промена фреквенције (већ израчунато $\nu = 1,76 \cdot 10^{11} Hz$) тако да за израчунавање брзине можемо да користимо нерелативистичку формулу:

$$V = \frac{\Delta\nu}{\nu} c = 350 \frac{km}{s} \tag{29}$$

(5п)

The Society of Astronomers of Serbia

Друштво астронома Србије

Друштво астронома Србије
Волгина 7, 11060 Београд
http://www.das.org.rs

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ АСТРОНОМИЈЕ ОБРАДА ПОДАТАКА 02.06.2024. године

Увод

У Јануару 2025. године, очи свих астронома/киња, биће уперене у Чиле, тачније у опсерваторију Вера Рубин. Управо тада се очекују први снимци, са ове опсерваторије. Опсерваторија носи назив по једној од најзначајнијих америчких астрономкиња **Вери Рубин**. Она је крајем прошлог века са својим тимом проучавала ротациону криву галаксије UGC 2885. У раду из 1980. године, објављеном у Астрономском журналу, Вера Рубин, Вилијам Кент и Форд Јр. потврђују постојање материје која не емитује зрачење нити интерагује попут барионске материје.
Ову *егзотичну* форму материје називају **тамна материја**.

Научницима/ама је и у овом веку ова галаксија постала предмет истраживања. Управо ћеш ти са својим тимом анализирати снимке са Хабл свемирског телескопа и Аресибо радио телескопа, како би рекреирао/ла резултате до којих је дошла Вера Рубин.

Како ће овај део такмичења представљати симулацију једног истраживања, поведи рачуна да користиш што прецизније методе за рачунање и обраду података. Потруди се да и саме резултате заокругљујеш на две децимале јер ће се како прецизност тако и тачност метода/резултата бодовати. Примера ради, ако искористиш прецизан метод али погрешиш рачун и добијеш да је Хаблова константа $H_0 \sim 100 \left[\frac{\text{km}}{\text{Mpc·s}}\right]$, добићеш мање поена него да не погрешиш и срачунаш да је $H_0 \sim 70 \left[\frac{\text{km}}{\text{Mpc·s}}\right]$, али не брини превише јер ћеш добити и одређен број поена за метод.

П.С. Аутор овог задатка под *својим тимом*, подразумева да је тај тим имагинаран. Строго је забрањена комуникација са осталим такмичарима/кама такмичења.
П.С.С. Срећно и полако читај, имаш времена за све!

1 Хабл-Леметров закон

Хабл је почетком двадесетог века показао да је брзина удаљавања галаксија од Земље сразмерна њиховом растојању и ова релација је дефинисана као:

$$v = H_0 \cdot D \tag{1}$$

где је v $\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right]$ брзина удаљавања, H_0 је Хаблов параметар док је D растојање између Земље и галаксије изражено у Mpc.

У табели 1 се налазе растојања као и брзине удаљавања за 5 галаксија, које је снимио твој тим.

Име галаксије	**Растојање** [Mpc]	**Брзина удаљавања** $\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right]$
M31	0.78	-300
M81	3.63	142
M101	6.95	241
НГЦ 3198	14.5	663
НГЦ 7331	14.7	816

Табела 1: Растојања и брзине удаљавања за 5 галаксија.

Задатак:

1.1 (20 п) Израчунај вредност Хабловог параметра (H_0) на основу података датих у табели 1.

2 Анализа посматрања у видљивом делу спектра

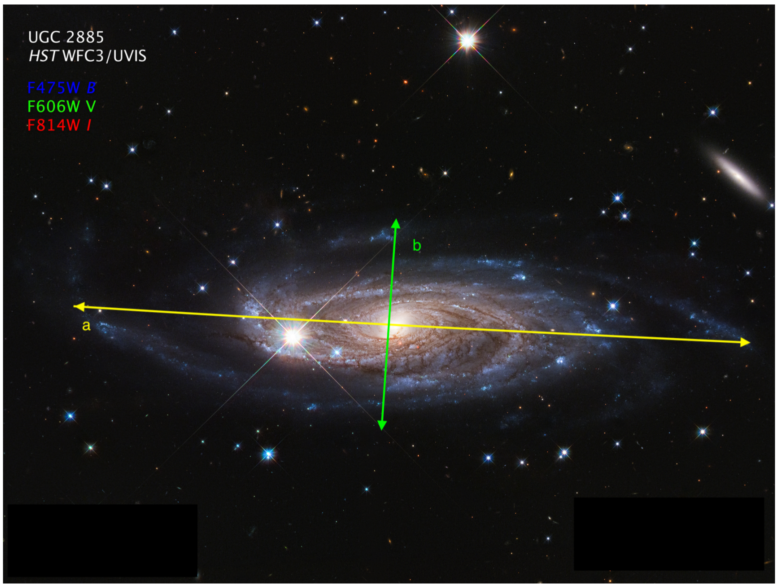
Спирална галаксија, UGC 2885 се налази у сазвежђу Персеј, она није видљива голим оком, али се може посматрати неким ”озбиљнијим” телескопом.

Твој тим је аплицирао за време на Хабл свемирском телескопу. Добили сте време за снимање! Обрађени снимак се налази на слици 1.
На слици су приказане велика и мала оса галаксије које износе a $= 3,9'$ и b $= 1,9'$.

Анализирајући литературу открио/ла си да је могуће израчунати инклинацију (i) галаксије по формули:

$$\cos^2 i = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - q_0^2}{1 - q_0^2} \tag{2}$$

где је q_0 прави однос оса, претпоставити да он износи $q_0 = 0,3$.



Слика 1: Галаксија UGC 2885 снимљена Хабл свемирским телескопом, камером $WFC3/UVIS$.

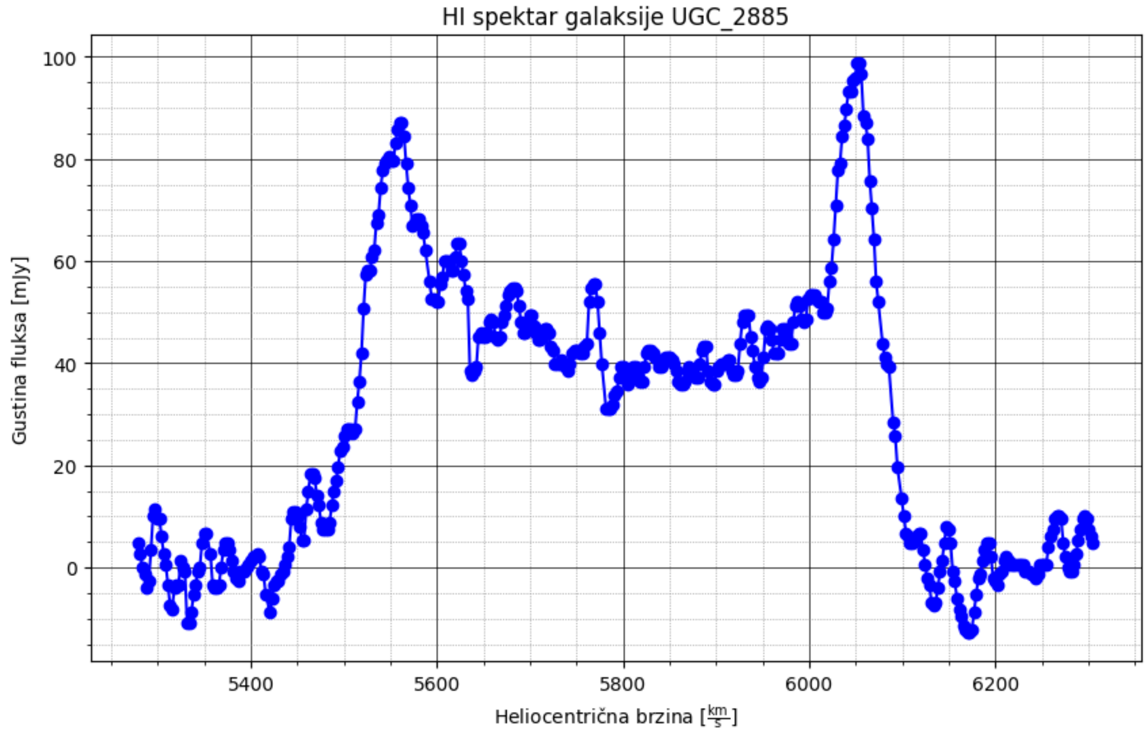
Задатак:

2.1 (2 п) Израчунај инклинацију (i) под којом видимо галаксију UGC 2885.

3 Анализа посматрања неутралног водоника HI

Најзаступљенији хемијски елемент чије присуство превазилази димензије спиралних грана (видљивих у визуелном делу спектра) је неутрални водоник HI.
Неутрални водоник испуњава ретке регионе у међузвезданом простору. Овај елемент је могуће детектовати на $\lambda = 21\,\mathrm{cm}$. Она настаје променом енергетског стања усамљеног, неутралног, водониковог атома, спонтаном променом спина.

На слици 2 је представљен HI емисиони спектар галаксије UGC 2885, снимљен Аресибо радио телескопом. Лако је уочити Доплеров помак ка плавом односно црвеном делу спектра, који настаје услед ротације галаксије. Овај ефекат је могуће приметити на 2 места где је примећено значајно повећање интензитета флукса зрачења.



Слика 2: HI емисиони спектар UGC 2885.

Задаци:

3.1 **(5 п) Анализом слике 2, пронађи брзину** (v) **којом се галаксија** UGC 2885 **удаљава од Земље .**

3.2 **(2 п) Одреди растојање** $D[\mathrm{Mpc}]$ **до галаксије** UGC 2885**.**

4 Маса гаса

Након што вам је познато растојање до галаксије, могуће је израчунати и масу гаса.

Уколико емисија HI долази из оптички танког региона, може се апроксимирати да је укупан флукс зрачења $S(v)$ пропорцијалан маси HI:

$$\left(\frac{M_{HI}}{M_{\odot}}\right) = 2,36 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{D}{\mathrm{Mpc}}\right)^2 \cdot \frac{S(v)}{Jy \cdot \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}} \tag{3}$$

Задаци:

4.1 **(20 п) Анализом слике 2, и решавањем једначине** (3)**, израчунај масу неутралног водоника** (M_{H1}) **у галаксији** UGC 2885**.**

4.2 **(2 п) Уколико је познато да је** $M_{gas} = 1,33 \cdot M_{HI}$**, израчунај укупну масу гаса у овој галаксији.**

5 Барионска Тали-Фишерова релација

Тренутно ти је позната маса гаса, већ си упознат да је укупна барионска маса сума масе гаса и масе звезда. У овом делу ћеш управо рачунати барионску масу галаксије UGC 2885.

Крајем седамдесетих година XX века, Р. Брент Тали и Ј. Ричард Фишер су дефинисали емпиријску релацију, између масе и праве (интринзичне) луминозности спиралне галаксије.

$$L \sim v_{rot}^4 \tag{4}$$

Почетком XXI века, овај модел је добио допуну и дефинисана је **Барионска Тали-Фишерова релација**. Према овој релацији укупна барионска маса, галаксије пропорционална је ротационој брзини:

$$M_b = A \cdot v_{rot}^4 \tag{5}$$

где је $A = 50 \cdot M_\odot \frac{\mathrm{s}^4}{\mathrm{km}^4}$, док је $M_b = M_{gas} + M_*$, где је M_* маса звезда у галаксији.

Ротациону брзину галаксије је могуће израчунати према једначини:

$$v_{rot} = \frac{W_{50}}{2 \cdot \sin i} \tag{6}$$

где је W_{50} брзина која се рачуна као ротациона брзина на половини висине максимума флукса зрачења.

Задаци:

5.1 (20 п) Израчунај ротациону брзину галаксије (v_{rot}).

5.2 (2 п) Израчунај барионску масу галаксије (M_b).

5.3 (2 п) Израчунај масу звезда у галаксији UGC 2885.

6 Укупна маса галаксије

Док си се ти бавио/ла рачунањем барионске масе галаксије UGC 2885 твој тим је за то време анализирао ротациону криву ове галаксије. Током те анализе израчунали су укупну масу галаксије (M).
Све вас је зачудио тај резултат, јер су они израчунали да је укупна маса галаксије за читав ред величине већа него барионска маса коју си ти израчунао/ла. Што вас доводи до истог закључка до којег је дошла и Вера Рубин и тиме потврдила присуство тамне материје.

Ти као искусан/на истраживач/ица желиш да поновиш њихове резултате, и да се увериш да нису погрешили у рачуну али на основу података које си већ израчунао/ла. Позната ти је ротациона брзина галаксије, а и знаш да можеш да израчунаш полупречник ове галаксије на основу података које имаш са снимака које је направио Хабл свемирски телескоп. Остаје ти још само да не направиш грешку у рачуну!

Задаци:

6.1 (20 п) Израчунај укупну масу галаксије (M).

6.2 (5 п) Израчунај однос укупне масе и барионске масе галаксије $n = \frac{M}{M_b}$.

7 Шта је све потребно израчунати

7.1 (20 п) Израчунај вредност Хабловог параметра (H_0) **на основу података датих у табели 1.**

7.2 (2 п)Израчунај инклинацију (i) **под којом видимо галаксију** UGC 2885.

7.3 (5 п)Анализом слике 2, пронађи брзину којом се галаксија UGC 2885 **удаљава од Земље** (v).

7.4 (2 п)Одреди растојање D[Mpc] **до галаксије** UGC 2885.

7.5 (20 п)Анализом слике 2, и решавањем једначине (3), **израчунај масу неутралног водоника** (M_{H1}) **у галаксији** UGC 2885.

7.6 (2 п) Уколико ти је познато да је $M_{gas} = 1,33 \cdot M_{HI}$, **израчунај укупну масу гаса у овој галаксији.**

7.7 (20 п) Израчунај ротациону брзину галаксије $(\mathrm{v}_{\mathrm{rot}})$.

7.8 (2 п) Израчунај барионску масу галаксије $(\mathrm{M}_{\mathrm{b}})$.

7.9 (2 п) Израчунај масу звезда у галаксији UGC 2885.

7.10 (20 п) Израчунај укупну масу галаксије (M).

7.11 (5 п) Израчунај однос укупне масе и барионске масе галаксије $\mathrm{n} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}_{\mathrm{b}}}$.

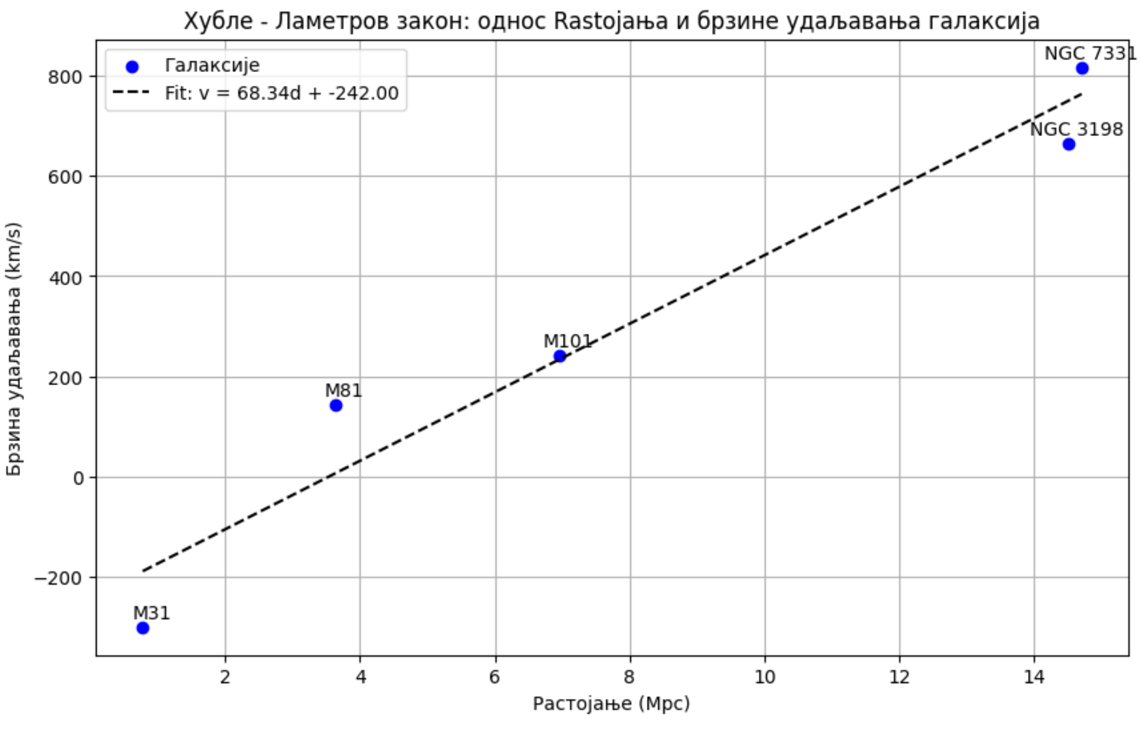
8 Решења

8.1 (20 п) Израчунај вредност Хабловог параметра (H_0) на основу података датих у табели 1.

У овом задатку, потребно је да такмичари/ке израчунају (H_0), квалитет као и исцртавање графика се не бодује посебно.

Уколико ученици искористе метод најмањих квадрата метод бодовати са 10 поена.
Уколико ученици искористе мање прецизан метод, а који их доводи до математички смисленог резултата, попут одређивања једначине праве кроз две тачке, то бодовати са 5 поена.

Референтни фит је представљен на слици 3, док је референтна вредност за H_0 представљена релацијом 9. За фитовање ових података, односно рачунање, коришћена је numpy библиотека, и функција numpy.plofit.



Слика 3: Хабл - Ламетров закон: однос растојања и брзине удаљавања галаксија

На основу претходног графика добија се:

$$H_0 = 68,34 \ \frac{\text{km}}{\text{Mpc} \cdot \text{s}} \tag{7}$$

Расподела поена под условом да ученик представи метод израчунавања:

$$
\begin{aligned}
&H_0 \in [67, 69] \rightarrow (5 \text{ p}) \\
&H_0 \in [63, 67) \cap (69, 73] \rightarrow (4 \text{ p}) \\
&H_0 \in [59, 63) \cap (73, 77] \rightarrow (3 \text{ p}) \\
&H_0 \in [55, 69) \cap (77, 81] \rightarrow (2 \text{ p}) \\
&H_0 < 55 \vee H_0 > 81 \rightarrow (1 \text{ p})
\end{aligned}
$$

Уколико ученик/ца не представи метод већ само упише вредност, овај део задатка се бодује са 0 поена. Ово је обавезан услов јер је вредност за Хаблов параметар дата у константама који се достављају кандидатима/кињама.

8.2 (2 п)Израчунај инклинацију (i) под којом видимо галаксију UGC 2885.

Заменом познатих вредности у једначину 2, добија се:

$$
\begin{aligned}
&\cos i = \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - q_0^2}{1 - q_0^2}} \\
&\cos i = 0,66 \\
&i = \arccos(0,66) \\
&i = 1,16 \ \ [\text{rad}] \\
&i = 66,4^\circ
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Уколико је i $\in [63,4, 69,4]$, задатак бодовати са (2 p) у сваком другом случају, задатак бодовати са (0 p).

8.3 (5 п) Анализом слике 2, пронађи брзину којом се галаксија UGC 2885 удаљава од Земље (v).

У овом делу задатка такмичар/ка треба да препозна да брзина удаљавања највише одговара вредности на средини галаксије. Средина галаксије је одређена на основу растојања између два пика, која представљају доплеров помак видљивог услед ротације галаксије.

$$v = 5800 \left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right] \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &v \in [5750, 5850] \ \left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right] \rightarrow (5 \text{ p}) \\ &v \in [5700, 5750) \cap (5850, 5900] \ \left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right] \rightarrow (2 \text{ p}) \\ &v < 5700 \ \left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right] \lor v > 5900 \ \left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right] \rightarrow (0 \text{ p}) \end{aligned}$$

8.4 (2 п) Одреди растојање $D[\mathrm{Mpc}]$ до галаксије UGC 2885.

Из једначине 1 следи:

$$\begin{aligned} D &= \frac{v}{H_0} \\ D &= 84,87 \ [\mathrm{Mpc}] \end{aligned}$$

Уколико је $D \in [80, 90]$ [Mpc] ученику/ци доделити свих 2 поена у сваком другом случају, дати 0 поена.

8.5 (20 п) Анализом слике 2, и решавањем једначине (3), израчунај масу неутралног водоника (M_{HI}) у галаксији UGC 2885.

У овом делу задатка кандидат/киња треба да препозна, да је могуће израчунати приближну вредност за укупан флукс тако што израчуна суму свих правоугаоника који се налазе унутар површине (или мало излазе изнад површине под плавом линијом) а чије ја појединачна површина $s = 5 \cdot 50 \left[\frac{\mathrm{mJy \cdot km}}{\mathrm{s}}\right]$.

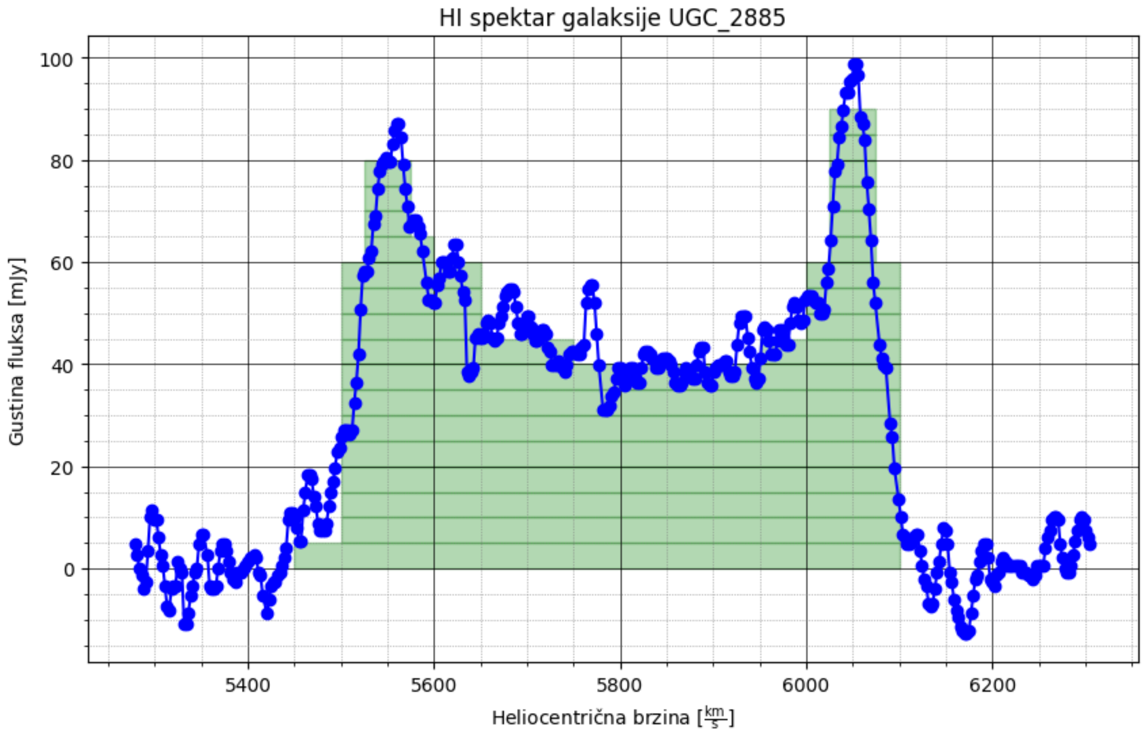
Уколико ученик/ца препозна да треба да користи правоугаонике, површине s за рачунање укупног флукса доделити **15 поена**.

На слици 4 је представљен, референтни одброј правоугаоника који представља најприближнију површину која одговара нумеричкој вредности овог интеграла.

У овом одброју изборојано је $n = 130$ правоугаоника а чија је површина једнака s.

Решавањем једначине 3 добија се:

$$\left(\frac{M_{HI}}{M_{\odot}}\right) \sim 2,36 \cdot 10^5 \cdot 84,87^2 \cdot 10^{-3} \cdot n \cdot s$$
$$\left(\frac{M_{HI}}{M_{\odot}}\right) \sim 5,5 \cdot 10^{10}$$
$$M_{HI} = 5,5 \cdot 10^{10} \cdot M_{\odot}$$



Слика 4: Приближан укупни флукс, примењено на HI спектар галаксије UGC 2885.

Бодовање у наредном делу задатка је скалирано према одброју броја правоугаоника (n) што директно утиче на израчунату масу:

$$n \in [125, 135] \rightarrow \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_{\odot}} \in [5,3, 5,7] \rightarrow (5 \text{ p})$$

$$n \in [120, 125) \vee n \in (135, 140] \rightarrow \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_{\odot}} \in [5,09, 5,3) \vee \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_{\odot}} \in (5,7, 5,95] \rightarrow (4 \text{ p})$$

$$n \in [100, 120) \vee n \in (140, 160] \rightarrow \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_{\odot}} \in [4,24, 5,09) \vee \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_{\odot}} \in (5,95, 6,08] \rightarrow (3 \text{ p})$$

$$n \notin [100, 160] \rightarrow \frac{M_{HI}}{10^{10} \cdot M_{\odot}} \notin [4,24, 6,08] \rightarrow (2 \text{ p})$$

8.6 (2 п) Уколико је познато да је $M_{gas} = 1,33 \cdot M_{HI}$, израчунај укупну масу гаса у овој галаксији.

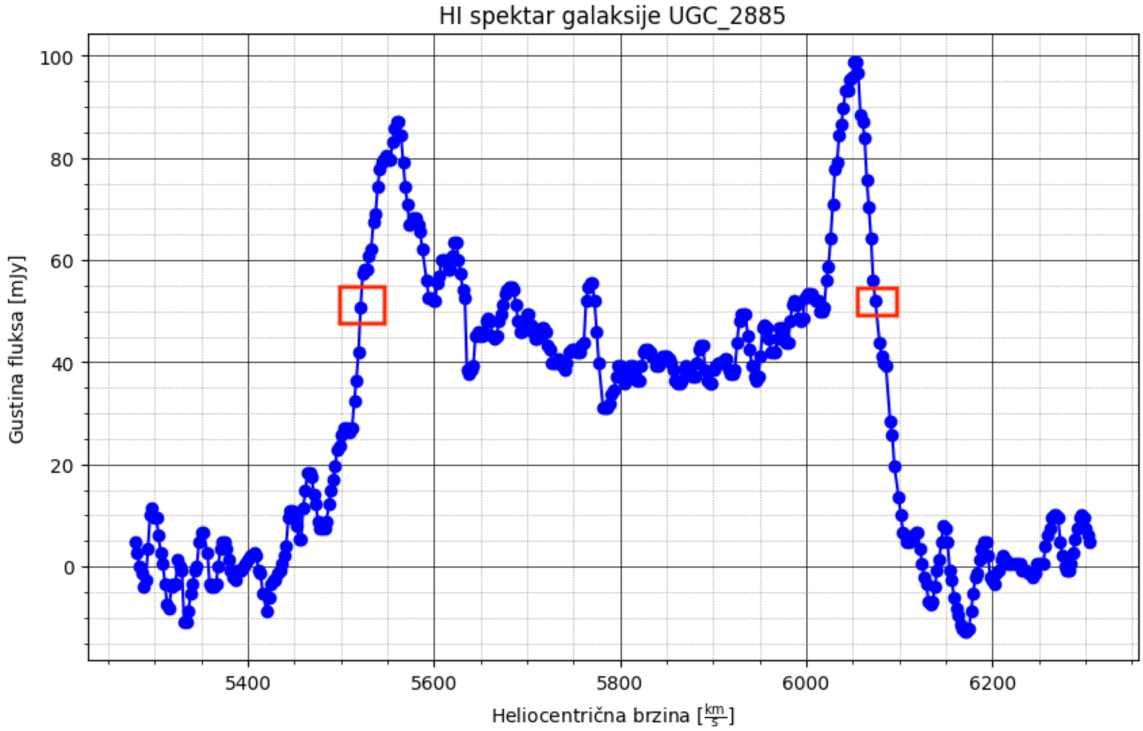
Према једначини, добија се да је:

$$M_{gas} = 7,35 \cdot 10^{10} M_{\odot}$$

Уколико је $\frac{M_{gas}}{10^{10} \cdot M_{\odot}} \in [6,9]$ доделити свих 2 поена у супротном а ако примени поступак доделити 1 поен.

8.7 (20 п) Израчунај ротациону брзину галаксије ($\mathrm{v_{rot}}$).

У овом задатку потребно је препознати да максимални интензитет износи $F_{max} = 100$mJy, одакле следи да средина на половини максимума одговара $F_{FWHM} = 50$mJy. Сада је потребно пронаћи два податка која су најприближнија овој вредности (слика 5).



Слика 5: Приближно одређивање података најближих F_{FWHM}.

Одакле се могу приближно одредити вредности интензитета хелиоцентричних брзина за ова два податка.

$$v_1 \in [5500, 5550]\left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right]$$
$$v_2 \in [6150, 6200]\left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right]$$

За овако одабране вредности брзина доделити (8 p) у сваком другом случају , а ако примени поступак доделити, (1 p). Овај део бодовања се односи и на разумевање појма, половина на висини максимума, тако да уколико ученик/ца опише са разумвењем, или то исцрта бодовати са 5 поена.

$$\begin{aligned} W_{50} &= v_2 - v_1 \rightarrow (7 \text{ p}) \\ W_{50} &= 6075\left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right] - 5525\left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right] \\ W_{50} &= 550\left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right] \end{aligned} \tag{10}$$

Уколико за резултат важи, $W_{50} = 550 \pm 50 \left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right]$ тада доделити 2 поена, ако резултат не буде у том интервалу ученицима/цама, а применили су поступак доделити 1 поен.

Из једначине 6 сада следи:

$$v_{rot} = \frac{W_{50}}{2 \cdot \sin i}$$
$$v_{rot} = \frac{550}{2 \cdot \sin(66,4^\circ)}$$
$$v_{rot} = 299,95 \left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right]$$

Уколико је $v_{rot} \in [280, 320] \left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right]$, ученику/ци доделити 3 поена, у супротном и уколико има поступак доделити 1 поена.

8.8 (2 п) Израчунај барионску масу галаксије ($\mathrm{M_b}$).

Према релацији 5, добија се:

$$M_b = 50 \cdot 299,95^4 M_\odot$$
$$M_b = 4,05 \cdot 10^{11} M_\odot$$

Уколико је $\frac{M_b}{10^{11} M_\odot} \in [3,5]$, ученику/ци доделити 2 поена, у супротном уз поступак доделити 1 поен.

8.9 (2 п) Израчунај масу звезда у галаксији UGC 2885.

Према поставци задатка имамо да је:

$$M_* = M_b - M_{gas}$$
$$M_* = 40,5 \cdot 10^{10} M_\odot - 7,35 \cdot 10^{10} M_\odot$$
$$M_* = 33,15 \cdot 10^{10} M_\odot$$

Уколико је $\frac{M_*}{10^{10} \cdot M_\odot} \in [29,37]$, ученику/ци доделити 2 поена, у супротном уз поступак доделити 1 поен.

8.10 (20 п) Израчунај укупну масу галаксије (M).

Ученик/ца треба да се сети да му је дата велика оса галаксије (a). Користећи се овим податком могуће је израчунати дијаметар (d) галаксије:

$$a = \frac{2d}{D} \rightarrow (5 \text{ p})$$
$$2d = a \cdot D$$
$$2d = 0,0016[\mathrm{rad}] \cdot 84\mathrm{Mpc}$$
$$2d = 134,4\mathrm{Kpc}$$
$$d = 67\mathrm{Kpc}$$

Уколико је $d \in [50,83]$ [Kpc] ученику/ци дати 5 поена, у супротном уз поступак доделити 2 поена.

Када ово израчуна ученик/ца треба да се сети **Теореме Виријала**:

$$\begin{aligned} &2K + U = 0 \rightarrow (5 \text{ p}) \\ &K = -\frac{U}{2} \end{aligned} \tag{11}$$

Уколико нам је такође познато да:

$$\begin{aligned} &K = \frac{mv^2}{2} \\ &U = -\frac{GMm}{2d} \rightarrow (3 \text{ p}) \end{aligned} \tag{12}$$

Заменом једначина 12 у једначине 11 добија се:

$$\begin{aligned} &M = \frac{v^2 \cdot d}{G} \rightarrow (5 \text{ p}) \\ &M = 2,69 \cdot 10^{42}[\text{kg}] \\ &M = 1,34 \cdot 10^{12} M_\odot \end{aligned}$$

Уколико је ученик/ца израчунао/ла до на ред величине, дати и на овом делу 2 поена у супротном, ако је испунио/ла рачун доделити 1 поен.

8.11 (5 п) Израчунај однос укупне масе и барионске масе галаксије $\mathrm{n} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M_b}}$.

Једноставно следи:

$$\begin{aligned} &n = \frac{M}{M_b} \\ &n = \frac{1,34 \cdot 10^{12} M_\odot}{4,05 \cdot 10^{11} M_\odot} \\ &n = 3,3 \end{aligned} \tag{13}$$

Уколико је ученик/ца израчунао/ла до на ред величине, дати и на овом делу 5 поена у супротном, ако је испунио/ла рачун доделити 1 поен.

ЗАДАТАК ЗА ПОСМАТРАЧКИ ДЕО ЗА РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ АСТРОНОМИЈЕ, 2024.

Аутор: Бранко Звездар Симоновић

1. Уцртај небески екватор на карти неба. Карта одговара географској ширини од 45°.
   (20 поена)

2. Звезда А(л)таир постићи ће горњу кулминацију за 2.5 звездана часа од текућег тренутка Т.
   2.1. Нацртај део небеског меридијана који се у овом тренутку, Т, налази изнад хоризонта.
   (50 поена)
   2.2. Уцртај место зенита за дати тренутак и означи карактеристичне тачке на видљивом луку небеског меридијана хоризонта (за наше геог. ширине, 45°).
   (25 поена)
   2.3. Која се позната и сјајна звезда у тренутку Т налази близу своје доње кулминације?
   (5 поена)

Решење: види карту неба у решењу!

1) С обзиром на то да је позната географска ширина за коју је дата карта, лако је успоставити размеру – од обода карте до средишта, оличеног Северњачом, има 90 + 45 степени, тј. 135°. Круг чији полупречних одговара паралелу од 90° треба описати около Северњаче.

2) На основу претходног задатка могу се наћи пресеци неб.екватора и еклиптике, која је приказана на карти (а, коју је лако препознати по томе што није концентрична, односно пол јој се не налази у средишту карте). Место пресека у пролећној тачки има нулту ректасцензију. На тај начин је дефинисана почетна тачка ободне поделе. Ово није од пресудног значаја за други задатак.
- Имајући у виду да ће ова звезда имати своју горњу кулминацију за 2.5^h, то значи да је сада у расту ка западној страни хоризонта. Дакле, небески мердијан за тренутак Т је западно од ње. Ако ће у тренутку кулминације ове звезде ректасцензија тачке југ одговарати ректасцензији звезде, сада се она налази за 2.5^h западно – на 17^h20^m.
~ Очекује се да такмичар зна у ком смеру треба да очита протекло време на ободној скали. Да је промашен смер може се препознати по томе што би полазна тачка за неб.меридијан била у 22^h20^m, уместо у 19^h50^m, из чега би се могао Регул препознати као тражена звезда.
~ У поставци задатка је истакнуто звездано време, што употребу карте чини тривијалном. Но, овде би се могла очекивати грешка услед претварања звезданог у грађанско време.

- На сферној пројекцији овај круг се пресликава у линију, која сем што пролази кроз јужну тачку, чију ректасцензију смо израчунали (и тиме одредили њен положај на карти неба), пролази и кроз видљиви небески пол – средину карте, у близини Северњаче.

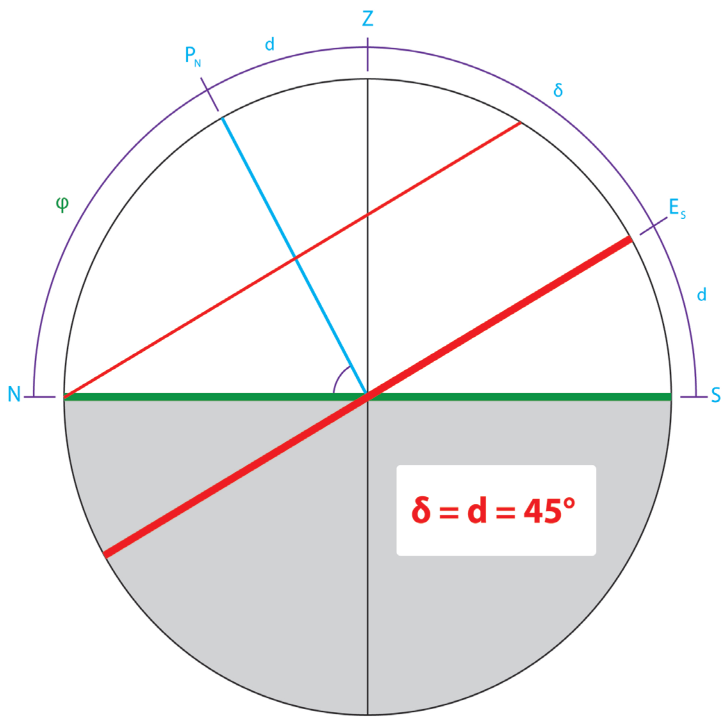
- Видљиви део неб.меридијана је одређен двема крајњим тачкама олеате, тј. тачкама које би одговарале северу и југу на хоризонту.

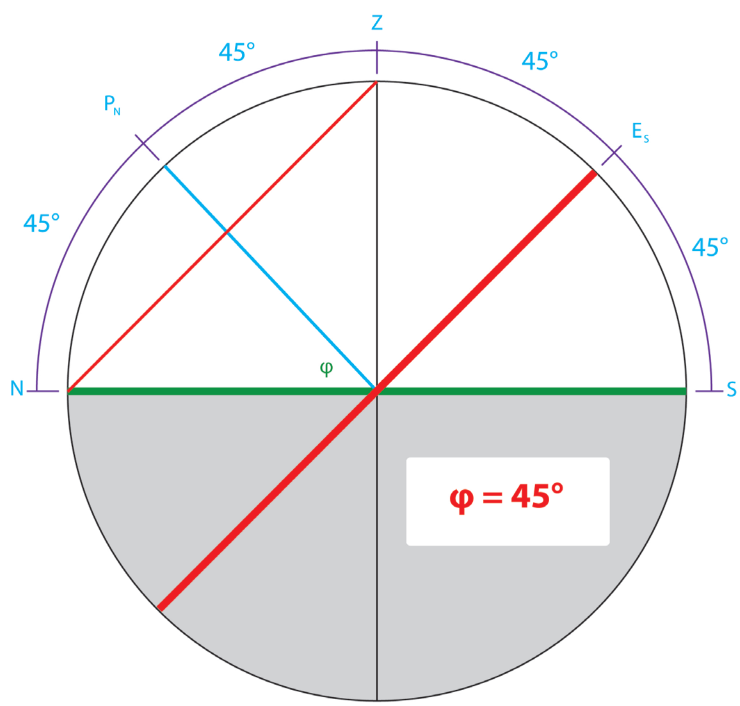
- Поларна даљина северне тачке на хоризонту једнака је географској ширини места. Понуђена геог.ширина, која одговара нашим крајевима, олакшава проналажење деклинације ове тачке утолико што су оне једнаке, d = δ = 45° – северни небески пол се налази на пола пута између зенита и северне тачке на хоризонту (односно једног краја небеског меридијана). Имајући то у виду, понуђена деклинациона скала нам може помоћи да нађемо деклинацију од 45° и уцртамо дневни паралел који ће наш неб.меријан пресећи у двема тачкама, у тачки север и у зениту. (Узгред, овај дневни паралел је уједно и циркумполарни круг датог места, јер додирује хоризонт у једној тачки – север – коју смо помоћу њега одредили).

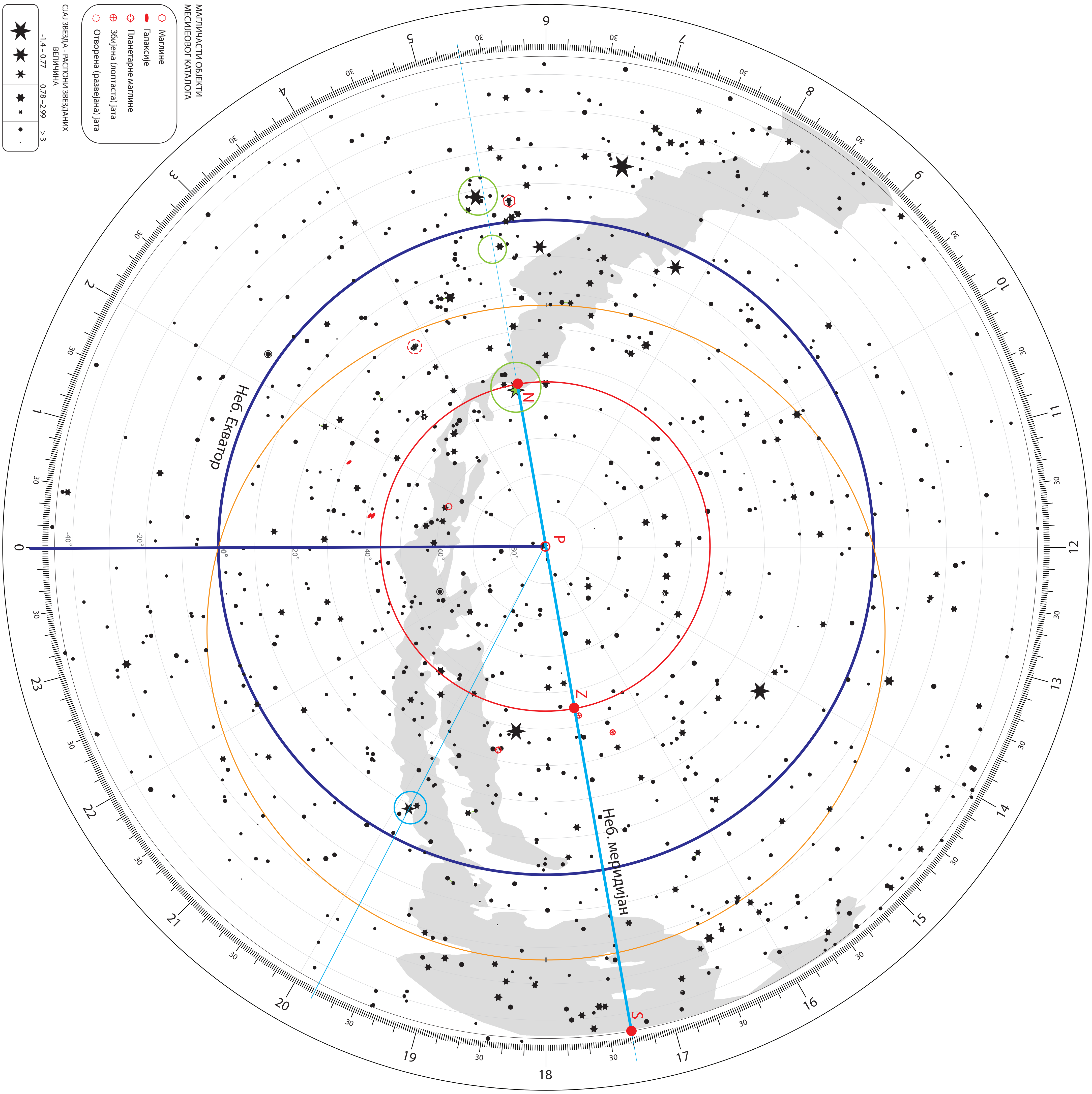
- Такође имајући у виду дату размеру карте, чија деклинација сеже до -45°, може се лако реконструисати и <u>јужна тачка</u> у пресеку небеског меридијана и самог ободног круга карте. У осталом, <u>то је била и полазна тачка у почетном дефинисању положаја неб.меридијана</u>.

- Карактеристичне тачке на неб.меридијану су: <u>северни небески пол</u>, <u>северна</u> и <u>јужна тачка</u> (на крајевима видљивог лука) и <u>зенит</u>. Зенит смо раније реконструисали помоћу дневног паралела од 45°, а свакако мора бити на средини видљивог дела небеског меридијана.

- С обзиром на то да очекујемо да доња кулминација буде видљива над хоризонтом звезда коју тражимо се налази над северном страном света, близу неб.меридијана. Уколико је све урађено на исправан начин, требало би лако уочити <u>Капелу</u>, алфу Возара, над самом северном тачком небеског меридијана. Но, могу се признати као тачни одговори и <u>Белатрикс</u> и <u>Ригел</u> из Ориона, које се такође налазе близу неб.меридијана у доњој кулминацији.






МАГЛИЧАСТИ ОБЈЕКТИ МЕСИЈЕОВОГ КАТАЛОГА
Маглине
Галаксије
Планетарне маглине
Збијена (лоптаста) јата
Отворена (развејана) јата
СЈАЈ ЗВЕЗДА - РАСПОНИ ЗВЕЗДАНИХ ВЕЛИЧИНА
-1.4 – 0.77
0.78 – 2.99
> 3
Неб. Екватор
Неб. меридијан
N
Z
P
S
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23