РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2022

ТЕОРИЈА

Кратки задаци

1. У Београду ($\lambda = 20°30'$) једног дана право подне се догађа у $12^{\mathrm{h}}36^{\mathrm{m}}$ (време које је тада на снази). Истог дана када је по UT (светско време) поноћ, звездано време за Гринич је $s_{g0} = 14^{\mathrm{h}}12^{\mathrm{m}}$. Колика је тог дана ректасцензија Сунца $\alpha_{\odot}$, а колико временско изједначење η?

Решење. Право подне значи горња кулминација Сунца. Пошто је тада Сунчев часовни угао једнак нули, одговарајуће звездано време s_{bg2} једнако је његовој ректасцензији, дакле $s_{bg2} = \alpha_{\odot}$. Да бисмо нашли s_{bg2}, потребно нам је s_{bg1}, звездано време у Београду које одговара s_{g0}. Њега налазимо из пропорције

$$\frac{\Delta s}{24} = \frac{\Delta \lambda}{360},$$

где су величине означене са Δ разлике које су једнаке: $\Delta\lambda = \lambda$, с обзиром на то да је географска дужина Гринича 0°, $\Delta s = s_{bg1} - s_{g0}$. Одавде следи $s_{bg1} = 15^{\mathrm{h}}34^{\mathrm{m}}$. Временски размак $s_{bg2} - s_{bg1}$ налазимо из разлике времена по Сунцу, а она је једнака $12^{\mathrm{h}}36^{\mathrm{m}} - 2^{\mathrm{h}}$. Пошто се горња кулминација Сунца догађа тако касно, закључујемо да је датог дана на снази било тзв. летње време (средњоевропско$+1$ час), јер апсолутна вредност временског изједначења не може прећи неких 15 минута. Међутим, добијени временски размак од $10^{\mathrm{h}}36^{\mathrm{m}}$ изражен је у јединицама Сунчевог времена, зато га треба претворити у јединице звезданог времена. У ту сврху послужиће нам позната пропорција на основу које је

$$s_{bg2} - s_{bg1} = 10^{\mathrm{h}}36^{\mathrm{m}} \frac{T_{ms}}{T_{sid}},$$

где су T_{ms} и T_{sid} трајања средњег дана по Сунцу и звезданог дана (период Земљине ротације), респективно; $T_{ms} = 24^{\mathrm{h}}$, $T_{sid} = 23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}4^{\mathrm{s}}$ (исту вредност има и количник $366{,}2422/365{,}2422$ – тропска година изражена у звезданим и Сунчевим данима). Следи $s_{bg2} = 2^{\mathrm{h}}11^{\mathrm{m}}45^{\mathrm{s}}$, што значи, после заокругљивања $\alpha_{\odot} = 2^{\mathrm{h}}12^{\mathrm{m}}$. Када не би било временског изједначења, право подне у Београду би се увек догађало у $11^{\mathrm{h}}38^{\mathrm{m}}$ по средњоевропском времену, тј. у $12^{\mathrm{h}}38^{\mathrm{m}}$ по летњем времену. У тренутку када је датог дана по летњем времену било $12^{\mathrm{h}}38^{\mathrm{m}}$ или $0^{\mathrm{h}}0^{\mathrm{m}}$ по коригованом месном средњем времену, право време је износило $0^{\mathrm{h}}2^{\mathrm{m}}$. Према дефиницији временског изједначења следи $\eta = 2^{\mathrm{m}}$.

2. Летелица се избацује са Месеца. Када она достигне много велико селеноцентрично (од Месечевог средишта) растојање, а њено геоцентрично растојање је исто као на почетку, једнако средњем растојању Месеца од Земље, њена селеноцентрична брзина треба да испуни следеће услове: да има исти правац и смер као Месечева геоцентрична брзина и да летелица може да напусти систем Земља-Месец. Колика је почетна селеноцентрична брзина летелице? Занемари гравитацијско дејство Сунца, гравитацијско дејство Земље за време кретања летелице од Месечеве површи до потпуног удаљавања од Месеца, ексцентричност Месечеве путање и одступање Месечеве површи од сферног облика.

Решење. Дејство само Месеца у првој фази значи да важи закон о одржању (специфичне) енергије

$$\frac{1}{2}{v_0}^2 - \frac{G\mathfrak{M}_m}{R_m} = \frac{1}{2}{v_1}^2 \ . (2.1)$$

Овде је v_0 почетна селеноцентрична брзина, коју треба одредити, G константа гравитације, а $\mathfrak{M}_m$ и R_m су маса и полупречник Месеца, респективно. Друга брзина (v_1) је она на много великом хелиоцентричном растојању, што значи да се одговарајући потенцијал може занемарити. По дефиницији је

$$\vec{v} = \vec{V} - \overrightarrow{V_m} \,,$$

где су $\vec{v}$ и $\vec{V}$ селеноцентрична и геоцентрична брзина летелице, респективно, а $\overrightarrow{V_m}$ је геоцентрична брзина Месеца. Због услова о истом правцу и смеру на много великом растојању последња једнакост се своди на

$$v_1 = V_e - V_c \ ,$$

где су V_e и V_c критична и кружна геоцентрична брзина, респективно; с обзиром на то да се ексцентричност Месечеве орбите занемарује и услова напуштања система Земља-Месец. Изрази за ове две брзине су

$$V_c = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{a}} \quad ; \quad V_e = \sqrt{2}V_c \quad ,$$

где је $\mathfrak{M}_\oplus$ маса Земље, а a средње геоцентрично растојање Месеца. Израз (2.1) сада даје

$$v_0 = \left[\frac{2G\mathfrak{M}_m}{R_m} + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 \frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{a}\right]^{1/2}.$$

Пошто су све величине на десној страни познате (види константе), коначно се добија $v_0 = 2{,}4\ \mathrm{km\ s^{-1}}$.

3. За звезде малих маса ($\mathfrak{m} \leq 1\ \mathfrak{M}_\odot$) је познато: време боравка Сунца на главном низу Херцшпрунг-Раселовог дијаграма је 1×10^{10} година; за звезде класе М је 1×10^{12} година ($\mathfrak{m} = 0{,}25\ \mathfrak{M}_\odot$, $L = 0{,}01\ L_\odot$), тј. 1×10^{13} година ($\mathfrak{m} = 0{,}08\ \mathfrak{M}_\odot$, $L = 0{,}001\ L_\odot$). Одреди, за све ове звезде, масу потрошену током фазе главног низа изражену у промилима датих маса.

Решење. Време боравка на главном низу Херцшпрунг-Раселовог дијаграма τ се добија као количник енергије фузије, која је сразмерна маси звезде, и њене луминозности, тј.

$$\tau = \frac{W_{fz}}{L} . (3.1)$$

Из датих података се изводи закључак: $L\tau =$const, тј. енергија је иста, а пошто се ради о фузији, онда је

$$W_{fz} = c^2 \Delta\mathfrak{m} \ , \qquad (3.2)$$

где је c брзина светлости, а $\Delta\mathfrak{m}$ је тражена маса потрошена током фазе главног низа, која је, разуме се, такође иста за све три звезде јер је $c =$const. Означићемо са f ($f < 1$) удео масе расположиве за фузију. За Сунце знамо и масу и луминозност (види константе), па из израза (3.1) и (3.2) за њега налазимо $f_\odot = 0{,}67$ ‰. Примењујући ово исто за звезде чије су масе мање од Сунчеве добијамо, где бр. 1 важи за масивнију од њих, $f_1 = 2{,}7$ ‰ и $f_2 = 8{,}4$ ‰.

4. Звезда се налази иза слоја међузвездане прашине чија је дебљина 20 pc. Предња ивица слоја је на растојању $s_0 = 400$ pc од Сунца. Специфична екстинкција је пропорционална линијској концентрацији честица међузвездане прашине, док је њихова

запреминска концентрација константна, тако да је унутар слоја три пута већа него на путу до њега. За растојање s_0 специфична екстинкција је $\alpha = 0{,}6\ \mathrm{kpc}^{-1}$. Колика је укупна екстинкција на целом путу рачунајући и дебљину слоја? Мала помоћ: прикажи пут као ваљак мале површине основе.

Решење. Нека је S површина основе ваљка. Онда је укупан број честица међузвездане прашине дуж пута s_0 дат изразом

$$N(s_0) = nSs_0 \ ,$$

где је n концентрација тих честица. Линијска концентрација је с обзиром на дефиницију једнака производу површине основе и запреминске концентрације n. За пут кроз слој важи исто, само што се уноси дебљина слоја d уместо s_0. Међутим, у слоју је запреминска концентрација три пута већа него испред њега. Пошто је површина иста, онда је линијска концентрација такође три пута већа, тј. специфична међузвездана екстинкција је три пута већа. Најзад, екстинкцију дуж пута добијамо као производ специфичне екстинције и дужине тог пута. Следи за укупну екстинкцију

$$A = 0{,}6 \times s_0 + 1{,}8 \times d \ \ .$$

Овде се оба растојања изражавају у kpc. Према томе, $A = 0{,}276$. **Напомена.** Постоји и алтернатива, да се најпре израчуна средња специфична екстинкција за цео пут, која се потом помножи његовом дужином. Средња специфична екстинкција је дата изразом $\langle\alpha\rangle = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$, где су w_1 и w_2 тежине једнаке $400/420$ и $20/420$, респективно.

5. Спирална галаксија NGC 925 има црвени помак $\mathrm{z} = 1{,}8 \times 10^{-3}$ са колебањем од $\delta z = \pm 0{,}236\ z$. Колебање се приписује обртању диска чија је укупна маса $\mathfrak{M}_d = 6{,}62 \times 10^9\ \mathfrak{M}_\odot$. Да ли постоји потреба за тамном материјом? Укупна маса осталих сјајних подсистема је $\mathfrak{M}_o = 23 \times 10^9\ \mathfrak{M}_\odot$, угаони пречник диска θ_d =14’.

Решење. Применићемо на диск галаксије теорему виријала која гласи

$$2W_k + W_v = 0 \ . \ (5.1)$$

Величина W_k је укупна кинетичка енергија диска за коју се узима у обзир само обртање. Пошто је диск најсјајнији део галаксије, колебање црвеног помака приписаћемо средњој квадратској брзини његовог обртања, тј.

$$\langle u^2\rangle = (c\delta z)^2 \ ,$$

где је c брзина светлости. Кинетичка енергија је дата изразом

$$W_k = \frac{1}{2}\mathfrak{M}_d\langle u^2\rangle \ .$$

Виријал W_v се састоји из два дела, узајамног дејства унутар диска и дејства између диска и свих осталих подсистема, укључујући и тамну материју, ако је има. Он се може представити изразом

$$W_v = -G\mathfrak{M}_d\frac{\mathfrak{M}_d + \mathfrak{M}_{ex}}{r} \ .$$

Ознаке: G - константа гравитације, r - полупречник диска, $\mathfrak{M}_{ex}$ – маса свих осталих подсистема. Полупречник је дат као $r = (1/2)s\theta_d$, где је s растојање галаксије које налазимо из Хабловог закона

$$s = \frac{cz}{H},$$

где је H Хаблова константа. Ред величине црвеног помака (10^{-3}) дозвољава употребу класичне формуле за радијалну брзину. Уношење свих потребних израза у (5.1) после скраћивања масе диска даје

$$\mathfrak{M}_{ex} = \frac{r(c\delta z)^2}{G} - \mathfrak{M}_d \ .$$

Добија се $\mathfrak{M}_{ex} = 52{,}65 \times 10^9\mathfrak{M}_{\odot}$, што знатно превазилази датих $23 \times 10^9\mathfrak{M}_{\odot}$. Дакле, има потребе за тамном материјом. Међурезултати су: $r = 15{,}7$ kpc и $s = 7{,}7$ Mpc.

Дуги задаци

1. **Андромедина маглина и Млечни пут.** Андромедина маглина - $l = 121°2'$, $b = -21°36'$, $s = 0{,}7$ Mpc, $v_{rad} = -299\ \mathrm{km\ s^{-1}}$ – заједно са галаксијом Млечни пут чини окосницу Месне групе галаксија. Занемарујући масе свих осталих галаксија одреди трансверзалну компоненту брзине Андромедине маглине у односу на средиште Млечног пута да би најмање растојање између ове две галаксије било $\mathfrak{R}_{min} = 100$ kpc, а половина периода $(1/2)P = 6 \times 10^9$ година. Сунце се налази на растојању од средишта Млечног пута $R_{\odot} = 8{,}5$ kpc и креће се око њега по кружници у равни Млечног пута брзином од $220\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Колика ће бити маса Млечног пута ако је Андромедина маглина масивнија 1,4 пута?

Решење. Квадрат брзине којом се Андромедина маглина (АМ) креће у односу на средиште Млечног пута (МП) V^2 једнак је збиру квадрата радијалне и трансверзалне компоненте при чему је ова друга једнака количнику специфичног момента количине кретања J и растојања $\mathfrak{R}$. Пошто је $\mathfrak{R}_{min} > 0$, мора бити $J > 0$. Према томе, треба одредити момент количине кретања, а он је константан. Пре одређивања радијалне компоненте брзине приметимо следеће. У троуглу SMA чија су темена Сунце и средишта двеју галаксија, страница SM је много краћа од осталих што значи да је угао код темена А близак нули и да се растојања АМ од МП и Сунца могу сматрати једнаким, тј. да су тренутно средишта двеју галаксија на растојању од 0,7 Mpc. Брзина v_{rad} дата је изразом

$$v_{rad} = \frac{(\vec{V} - \overrightarrow{V_\odot}) \cdot \vec{s}}{s} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{s}}{s} - \frac{\overrightarrow{V_\odot} \cdot \vec{s}}{s} \ .$$

Пошто су правци и растојања практично исти, онда је први члан с десне стране тражена радијална компонента. Други члан је, с обзиром на дефиницију скаларног производа, једнак пројекцији Сунчевог кретања у односу на средиште МП на правац ка АМ. Као кретање по кружници Сунчева брзина мора бити нормална на полупречник, дакле смер јој је одређен као $l = 90°$, $b = 0°$ (обилажење по кружници у смеру казаљке на часовнику гледано са северног пола, $b = 90°$). Разлика лонгитуда од $31°2'$ даје за пројекцију у равни МП $188{,}51 \mathrm{km\ s^{-1}}$, а онда узимајући у обзир разлику латитуда добијамо да се Сунчева брзина на полуправу ка АМ пројектује са $175{,}27 \mathrm{km\ s^{-1}}$. Другим речима, када би АМ у односу на МП мировала, хелиоцентрични посматрач би за њу измерио приближавање оволиком брзином. Разуме се, она не мирује и зато њена радијална компонента брзине у односу на средиште МП износи $V_{\mathfrak{R}} = 123{,}73\ \mathrm{km\ s^{-1}} \approx 124\ \mathrm{km\ s^{-1}}$ $(175 + 124 = 299)$. Приближавање двеју галаксија се сматра аргументом у прилог томе да оне чине систем, а како су њихове димензије довољно мале у поређењу са међусобним растојањем, разматрамо их као материјалне тачке. Користећи одржање енергије и трећи Кеплеров закон имамо

$$\frac{1}{2}\frac{J^2}{{\mathfrak{R}_{min}}^2} - \frac{G\mathfrak{M}_{tot}}{\mathfrak{R}_{min}} = -\frac{G\mathfrak{M}_{tot}}{2a} \ ;$$

$$\frac{1}{2}\left({V_{\mathfrak{R}}}^2 + \frac{J^2}{\mathfrak{R}^2}\right) = -\frac{G\mathfrak{M}_{tot}}{2a};$$

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G\mathfrak{M}_{tot}}{4\pi^2} \ .$$

Овде је $\mathfrak{R}$ садашње растојање, a дужина велике полуосе и $\mathfrak{M}_{tot}$ укупна маса система, с обзиром на чињеницу да се разматра релативна орбита, 2,4 пута већа од масе МП; G је константа гравитације. Овај систем се своди на следећу једначину по a

$$\mathfrak{R}_{min}{}^2\left(\frac{8\pi^2 a^3}{\mathfrak{R}_{min}P^2}-\frac{4\pi^2 a^2}{P^2}\right)=\mathfrak{R}^2\left(\frac{8\pi^2 a^3}{\mathfrak{R}P^2}-\frac{4\pi^2 a^2}{P^2}-V_{\mathfrak{R}}{}^2\right)\ .$$

Ово је једначина трећег степена по a где је коефицијент за линеарни члан једнак нули. За брзину је погодно употребити Mpc по години уместо $\mathrm{km\ s^{-1}}$. Тако добијамо $a = 0{,}52$ Mpc, затим око $120\ \mathrm{km\ s^{-1}}$ за тражену трансверзалну брзину и око $8{,}5 \times 10^{12}\ \mathfrak{M}_{\odot}$ за укупну масу, што значи $3{,}5 \times 10^{12}\ \mathfrak{M}_{\odot}$ за масу МП. За овако велику масу МП нема основа. То је и разлог зашто научници сматрају да је трансверзална брзина АМ у односу на МП занемарљива.

2. **Магнетно поље унутар Сунчеве пеге.** Унутар Сунчеве пеге густина магнетне енергије (магнетни притисак) износи $w_m = 3{,}6 \times 10^4\ \mathrm{J\ m^{-3}}$. Вектор магнетне индукције је нормалан на Сунчеву површ. Протон (маса мировања $\mathfrak{m}_0 = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, количина електрицитета $q = e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C) чија је кинетичка енергија $E_k = 3$ GeV креће се по кружници унутар пеге. Одреди полупречник орбите и период обиласка протона. Знајући да наелектрисана честица (количина електрицитета q) која се креће убрзано (убрзање a) у јединици времена израчи енергију једнаку

$$\frac{E}{t}=\frac{q^2\gamma^4}{6\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{a^2}{c^2}+\frac{\frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})^2}{c^4}}{1-{v^2}/{c^2}}\right]\ ,$$

одреди енергију коју протон израчи током једног свог периода; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Константе за електромагнетно поље: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T^2N^{-1}m^2}$.

Решење. Густина магнетне енергије је дата формулом

$$w_m=\frac{B^2}{2\mu}\ .$$

Густина средине се овом приликом занемарује, тј. $\mu = \mu_0$ (вакуум), те је магнетна индукција $B = 0{,}3$ T. На протон делује Лоренцова сила. Пошто је угао између вектора брзине и индукције прав, онда је

$$epB=\frac{p^2}{r}\ ,$$

где је p количина кретања, а r тражени полупречник орбите. С обзиром на то да је дата кинетичка енергија протона знатно већа од његове енергије мировања, треба употребити релативистичку формулу за количину кретања и онда је

$$r = \frac{\sqrt{(\mathfrak{m}_0 c^2 + E_k)^2 - \mathfrak{m}_0{}^2 c^4}}{ceB}.$$

Полупречник је $r = 42{,}5$ m. Да би се израчунао период обиласка потребно је знати брзину v, која је једнака

$$v = \frac{\frac{\sqrt{(\mathfrak{m}_0 c^2 + E_k)^2 - \mathfrak{m}_0{}^2 c^4}}{c}}{\frac{\mathfrak{m}_0 c^2 + E_k}{c^2}} .$$

Период је количник обима и брзине, $P = 2\pi r/v$, $P = 9{,}17 \times 10^{-7}$ s. Убрзање је нормално на брзину и треба водити рачуна о релативистичком повећању масе протона услед кретања. Брзина је позната ($v = 0{,}97\ c$), а то значи да знамо и величину γ, $\gamma = 4{,}11$, те је вредност количника испред угласте заграде $1{,}464 \times 10^{-34}$ Js, убрзање налазимо преко познатог полупречника, а маса у кретању је једнака $\gamma \mathfrak{m}_0$. Стога

$$a = \frac{p^2}{r(\gamma \mathfrak{m}_0)^2} .$$

Однос a^2/c^2 је приближно једнак $5 \times 10^{13}\ \mathrm{s}^{-2}$. Тако се долази до резултата за снагу и енергију, енергија је реда величине $\sim 10^{-28}$ J.

ОБРАДА ПОДАТАКА

1. За потенцијал Земљиног поља гравитације на геоцентричном растојању r, $r \geq R_\oplus$ ($R_\oplus$ - полупречник Земље) обично се користи једноставна формула

   $$\Pi = \frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{r} ,$$

   где су G и $\mathfrak{M}_\oplus$ константа гравитације и маса Земље, респективно. Ова формула подразумева сферну симетрију, а зна се да је Земља спљоштена. Стога су увођене једноставне формуле које узимају последњу чињеницу у обзир и тада потенцијал у некој тачки, осим од геоцентричног растојања, зависи и од географске ширине φ. Тада симетрија више није сферна, него обртна, јер су површи дуж којих потенцијал има исту вредност (изопотенцијали) обртне. Ово значи да је пресек такве површи и равни Земљиног екватора кружница, а пресек са равни која је нормална на екваторску може бити спљоштен (скраћен дуж Земљине осе) или издужен („кромпираст“). Овде ће бити речи о две формуле. Код прве се потенцијал добија као збир потенцијала две материјалне тачке исте масе, једнаке половини Земљине масе, а које се налазе на Земљиној оси на истом растојању $|z|$ ($|z| \ll R_\odot$) од средишта Земље. Друга је дата експлицитно и гласи

$$\Pi = \frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 \frac{3\sin^2\varphi - 1}{2}\right].$$

У њој је J_2 бездимензиона константа, $J_2 = 1{,}08 \times 10^{-3}$. На последњој Санкт-Петербуршкој олимпијади у теорији за најстарији узраст разматране су ове две формуле и у испитивању њиховог слагања добијене су вредности ван скупа реалних бројева (имагинарне). Другим речима, установљено је да су некомпатибилне.

а) Изведи прву формулу (ону са збиром потенцијала двеју материјалних тачака).

б) На произвољном геоцентричном растојању r, $r > R_\oplus$, рачунај вредности потенцијала за различите вредности географске ширине са кораком од 15° према обема формулама, оној коју треба извести и другој која је дата. Као јединице користи $R_\oplus$ за растојање и $G\mathfrak{M}_\oplus/R_\oplus$ за потенцијал.

в) Шта би могло да буде разлог установљене некомпатибилности формула? Какав резултат очекујеш за Земљу, спљоштене или издужене изопотенцијалне површи? Одговор дајеш великим латиничним словом О (спљоштена - oblate) или P (издужена - prolate). Образложи одговор. Затим одговори на питање која од двеју формула даје резултате ближе стварности. Одговор напиши са 1,2 или 0, при чему је формула бр. 1 она коју треба да изведеш, а бр. 2 она дата, док 0 значи да не можеш да се одлучиш. У случају да је одговор 1 или 2 дај образложење.

Решење. а) Ако потенцијал гравитационог поља (даље само поља) Земље приближно приказујемо уз помоћ двеју материјалних тачака чије су масе $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ ($\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 = (1/2)\mathfrak{M}_\oplus$), растојања до њих r_1 и r_2, респективно, онда важи

$$\Pi = \frac{1}{2} G\mathfrak{M}_\oplus \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) .$$

Пошто се оне налазе на Земљиној оси на истом растојању од средишта ($|z|$), растојања r_1 и r_2 за неку тачку чије су координате r и φ изражавају се помоћу косинусне теореме

$$r_{1,2} = \sqrt{r^2 + z^2 \mp 2r|z|\sin\varphi} .$$

Према томе прва формула за потенцијал поља Земље гласи

$$\Pi = \frac{1}{2} G\mathfrak{M}_{\oplus} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2r|z|\sin\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 + 2r|z|\sin\varphi}} \right]. \ (1)$$

б) На почетку рада горња формула се преписује ради доделе броја

$$\Pi = \frac{G\mathfrak{M}_{\oplus}}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \frac{3\sin^2\varphi - 1}{2} \right] . \ (2)$$

Као пример узима се растојање $r = 1{,}2\ R_{\oplus}$. Треба приметити да конкретна вредност односа $|z|/R_{\oplus}$ није од значаја, као и да је потенцијал парна функција географске ширине, те тако и не треба рачунати за $\varphi < 0$.

φ	0	15	30	45	60	75	90
$\Pi(1)$	0,83261	0,83276	0,83315	0,83369	0,83424	0,83464	0,83478
$\Pi(2)$	0,83365	0,83358	0,83341	0,83318	0,83294	0,83277	0,83271

Код формуле (1) усвојено је $|z| = 0{,}05\ R_{\oplus}$.

в) Као што се и могло очекивати, на сфери $r = \mathrm{const} = 1{,}2\ R_{\oplus}$ у оба случаја вредности потенцијала нису исте. Међутим, у случају формуле (1) оне расту са географском ширином, док је у случају формуле (2) обрнуто. Сада је јасно зашто ове две формуле нису компатибилне. У случају формуле (1) вредност потенцијала на географској ширини φ, $\varphi > 0$, треба смањити да би била једнака оној за $\varphi = 0$, а то се постиже повећавањем растојања r. Закључујемо да су изопотенцијалне површи издужене („кромпирасте“) . У случају формуле (2) све је обрнуто, растојање треба смањити, тј. изопотенцијалне површи су спљоштене. За Земљу је одговор О. Разлог је да је она спљоштено небеско тело, што се и очекује с обзиром на Земљину ротацију. Према томе, треба уписати 2. Исто као и за изодензе (површи дуж којих је густина иста) и изопотенцијалне треба да буду спљоштене.

2. **Звезда δ Cep A.** Она је променљива звезда. Њено хелиоцентрично растојање је $s = 250$ pc, међузвездана екстинкција у V $A_v = 0{,}23$, ексцес боје $E_{bv} = 0{,}073$. Неопходни улазни подаци (ϑ - фаза, m_b - привидна величина у плавом, m_v - привидна величина за визуални део) дати су у Таблици 1. Болометријска поправка за Сунце износи $-0{,}08$.

Таблица 1

ϑ	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0,0	0,2	0,4	0,5
m_b	4,95	5,05	5,10	4,00	4,35	4,73	4,95
m_v	4,10	4,26	4,30	3,50	3,75	4,00	4,10

I Употпуни Таблицу 1 уносећи одговарајуће вредности апсолутне величине M_v и апсолутног индекса боје $M_b - M_v$, који треба израчунати.
Начини још једну таблицу – Таблицу 2 – у којој ће осим ϑ, M_v и $M_b - M_v$ бити још и одговарајуће вредности: ефективне температуре T_{eff}, болометријске поправке BC и луминозности L; одреди их користећи податке дате испод.
Корисни подаци

$M_b - M_v$	0,24	0,34	0,49	0,61	0,78	0,97	1,14
T_{eff}	7500	7000	6500	6000	5500	5000	4500
BC	$-0{,}06$	$-0{,}08$	$-0{,}10$	$-0{,}14$	$-0{,}21$	$-0{,}31$	$-0{,}51$

Јединица за температуру је К.

III Нађи полупречник R у функцији од фазе; нацртати график.

Решење. I Најпре рачунамо апсолутну величину M_v. Као што је познато, она је дата

$$m_v - M_v = 5\log s - 5 + A_v \quad .$$

У нашем случају свака m_v је већа од одговарајуће M_v за 7,22. Стварни индекс боје $M_b - M_v$ се добија поправљањем привидног $m_b - m_v$ за вредност ексцеса боје, што доводи до привидног пораста. Ово значи да разлика за сваки пар $m_b - m_v$ из Таблице 1 треба да се смањи за 0,073.

Таблица 1 (употпуњена)

ϑ	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0,0	0,2	0,4	0,5
m_b	4,95	5,05	5,10	4,00	4,35	4,73	4,95
m_v	4,10	4,26	4,30	3,50	3,75	4,00	4,10
M_v	$-3{,}12$	$-2{,}96$	$-2{,}92$	$-3{,}72$	$-3{,}47$	$-3{,}22$	$-3{,}12$
$M_b - M_v$	0,777	0,717	0,727	0,427	0,527	0,654	0,777

II На основи корисних података применом обичне линеарне интерполације, имајући у виду $BC = M_{bol} - M_v$, као и релације између $\log L$ и M_{bol}, добијају се следећи подаци

Таблица 2

ϑ	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0,0	0,2	0,4	0,5
M_v	$-3{,}12$	$-2{,}96$	$-2{,}92$	$-3{,}72$	$-3{,}47$	$-3{,}22$	$-3{,}12$
$M_b - M_v$	0,777	0,717	0,727	0,427	0,527	0,654	0,777
T_{eff}	5500	5670	5650	6700	6340	5870	5500
BC	$-0{,}21$	$-0{,}19$	$-0{,}19$	$-0{,}09$	$-0{,}11$	$-0{,}19$	$-0{,}21$
$\log L$	3,228	3,156	3,140	3,420	3,328	3,260	3,228

Јединица за L је луминозност Сунца (у списку констаната M_v, BC за њега дато).

III Добро је познато

$$L \propto R^2 {T_{eff}}^4 \ .$$

Користећи ову релацију могуће је добити следеће

ϑ	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0,0	0,2	0,4	0,5
$\log L$	3,228	3,156	3,140	3,420	3,328	3,260	3,228
R	45,28	39,22	38,78	38,06	38,24	41,25	45,28

Јединица за R је полупречник Сунца. Када је ефективна температура близу минимума (5500 K), полупречник има највећу вредност, док су на великим ефективним температурама његове вредности мање.

ПОСМАТРАЊЕ

1. Пред собом имаш звездану карту. а) Уцртај еклиптику. б) Укажи положај Сунца за данашњи дан, 7. мај 2022.

Решење. а) Слика је у прилогу.

б) За положај Сунца за 7. мај израчунаћемо његову лонгитуду $\lambda_{\odot}$. У ту сврху довољна је линеарна релација

$$\lambda_{\odot} = 360° \frac{t}{365{,}2422} \ .$$

Величина t је време које се, као што се лако види (тропска година), изражава у данима, а $t = 0$, наравно, одговара пролећној равнодневици. Нека је њен датум 21. март. Тада је $t = 47$ дана, те следи $\lambda_{\odot} = 46°19{,}5'$. Када на карти одредимо положај тачке пролећне равнодневице, а она је у сазвежђу Риба (пресек екватора и еклиптике), онда у директном смеру за добијени угао налазимо положај Сунца за 7. мај 2022.