РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2021

ТЕОРИЈА

Кратки задаци

1. Астроном је посматрао звезду чија је деклинација $\delta = 16°16'$ у Београду ($\lambda = 20°27'26"$ – исток, $\varphi = 44°48'53"$) у мају 2020. године. Била је повољна ноћ без месечине и горња кулминација, када је звезда посматрана, се догодила у $t_a = 2^{\mathrm{h}}31^{\mathrm{m}}$ (актуелно време). Колика је тада била висина звезде h у односу на хоризонт? Одреди приближно дан у месецу и ректасцензију звезде, ако је познато: фаза пуног месеца догодила се 7. маја, а у поноћ, између 6. и 7. маја, у Гриничу звездано време је било $s_G = 15^{\mathrm{h}}1^{\mathrm{m}}11^{\mathrm{s}}$.

Решење. У првом делу задатка, с обзиром на горњу кулминацију, користи се следећа релација

$$h = 90 - \varphi + \delta\,.$$

Одавде следи $h = 61°27'7"$. Пошто је ноћ била без месечине, а Месечев синодички период износи приближно 29 дана, следи да је дан у месецу био 21. или 22. Према дефиницији звезданог времена следи да је оно у тренутку горње кулминације једнако ректасцензији звезде. Разлика звезданих времена између Београда и Гринича Δs се одређује из пропорције

$$\frac{\Delta\lambda}{360} = \frac{\Delta s}{24}\ ,$$

где је $\Delta\lambda$ разлика географских дужина једнака апсолутној вредности географске дужине Београда, имајући у виду Гринич и да је Београд источно од њега. Следи $\Delta s = 1^{\mathrm{h}}21^{\mathrm{m}}50^{\mathrm{s}}$. Потребно је одредити звездано време за Гринич у поноћ која одговара дану посматрања. За разлику звезданих времена у Гриничу Δs_G важи следећа приближна релација

$$\Delta s_G = \nu \times 24^h\ ,$$

где је ν временски размак изражен у трајању тропске године (365,2422 средња дана по Сунцу, види константе), јер се за годину дана звездано време у поноћ на било ком месту на Земљи промени за 24 часа. У зависности од тога да ли је протекло 14 или 15 дана, имамо две могућности - $\nu_1 = 0{,}0383$, $\nu_2 = 0{,}0411$- чему одговарају два решења: $\Delta s_G(1) = 55^{\mathrm{m}}9^{\mathrm{s}}$, $\Delta s_G(2) = 59^{\mathrm{m}}11^{\mathrm{s}}$. Следи: $s_G = 15^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}20^{\mathrm{s}}$, ако се посматрање догодило 21. маја, тј. $s_G = 16^{\mathrm{h}}0^{\mathrm{m}}22^{\mathrm{s}}$, ако је посреди 22. мај. Поноћ у Гриничу, с обзиром на часовну зону и чињеницу да је месец мај, одговара времену од 2 часа после поноћи у Београду. Одговарајуће звездано време за Београд је: $s_B = 17^{\mathrm{h}}17^{\mathrm{m}}20^{\mathrm{s}}$ за 21. мај, тј. $s_B = 17^{\mathrm{h}}22^{\mathrm{m}}12^{\mathrm{s}}$ за 22. мај. Међутим, према услову задатка посматрање се догодило 31 минут касније. Оволиком временском размаку у Сунчевим јединицама одговара $31^{\mathrm{m}}5^{\mathrm{s}}$ звезданог времена (множи се чиниоцем $366{,}2422/365{,}2422$ јер тропска година садржи $366{,}2422$ звездана дана). Тако за тражену ректасцензију налазимо: $\alpha_1 = 17^{\mathrm{h}}48^{\mathrm{m}}25^{\mathrm{s}}$ (21. мај), $\alpha_2 = 17^{\mathrm{h}}53^{\mathrm{m}}17^{\mathrm{s}}$ (22. мај); прихватљива је приближна вредност $\alpha = 17^{\mathrm{h}}50^{\mathrm{m}}$.

2. Сателит обилази око планете. У апоцентру (када се налази најдаље од планете) у односу на планету креће се брзином $v(r_a) = 3{,}6\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. На растојању $r = a$ (a – велика полуоса) брзина је $v(a) = 5\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Изрази однос највеће и најмање брзине сателита у функцији ексцентричности. Одреди ексцентричност орбите сателита e.

Решење. Одржање специфичне енергије сателита даје

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{G\mathfrak{M}}{r} = -\frac{G\mathfrak{M}}{2a} \quad .(2.1)$$

Ознаке: G – гравитациона константа, $\mathfrak{M}$ – маса планете и r – тренутно растојање сателита од планете. Из једначине (2.1) следи да је квадрат брзине на растојању r једнак

$$v^2 = \frac{G\mathfrak{M}}{a}\left(\frac{2}{r/a} - 1\right) .(2.2)$$

У овом изразу једина променљива је бездимензионо растојање сателита r/a. Лако се запажа да је квадрат брзине све већи што је оно мање. Најмање је онда када је сателит у перицентру своје орбите, а највеће када је у апоцентру. Знајући да је $r_p = a(1-e)$ и $r_a = a(1+e)$ помоћу једначине (2.2) долазимо до траженог израза

$$\frac{v(r_p)}{v(r_a)} = \frac{1+e}{1-e} \ .$$

Такође из једначине (2.2) налазимо однос брзина које одговарају растојањима $r = a$ и $r = a(1+e)$

$$\frac{v(a)}{v(r_a)} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \ .$$

Обе брзине са леве стране су познате, решење ирационалне једначине гласи $e = 0{,}316$.

3. Две звезде које се налазе у равни галактичког екватора ($b = 0°$) имају исту привидну величину m_v, а налазе се на међусобном растојању $r = 5$ kpc. За разлику њихових апсолутних величина важи $M_{v2} - M_{v1} = 1$. Међузвездана екстинкција је линеарна функција хелиоцентричног растојања s, $A_v = \alpha_v s$; где је α_v специфична међузвездана екстинкција која, у овом случају, зависи од смера, тј. лонгитуде l (обзиром на $b = 0°$) и екстремне вредности су јој једнаке 0 и 1,6 kpc^{-1}. Ако је за смер ка сјајнијој звезди специфична екстинкција најмања могућа, а за смер ка мање сјајној важи супротно, одреди њихова рсатојања s_1 и s_2.

Решење. Разлика привидне и апсолутне звездане величине за исти филтер носи назив модуо растојања. С обзиром на везу између, на пр. m_v и M_v, филтер V, он је дат изразом

$$\mathrm{mod\ V} = 5 \log s - 5 + A_v \ .$$

Пошто су привидне величине једнаке и екстинкција је пропорционална растојању, добија се једначина

$$M_2 - M_1 = 5 \log \frac{s_1}{s_2} + \alpha_1 s_1 - \alpha_2 s_2 \ .$$

Најмања и највећа могућа специфична екстинкција значе $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1{,}6\ \mathrm{kpc}^{-1}$. С друге стране, минимум специфичне екстинкције одговара антицентру ($l = 180°$), а максимум центру ($l = 0°$). Закључак је да се две звезде налазе на истој правој, дакле

$$r = s_1 + s_2.$$

Добија се систем од две једначине који треба решити по s_1 и s_2, а где су растојања изражена у kpc. Методом пробе и грешке (прва једначина је трансцендентна) уз брзу конвергенцију налазе се растојања $s_1 = 3{,}905$ kpc и $s_2 = 1{,}095$ kpc.

4. У спектру једне звезде мерена је таласна дужина за линију Hα ($\lambda_0 = 656{,}28$ nm). Таласна дужина у просеку показује прираштај $\Delta\lambda = 0{,}13$ nm. Услед промене прираштаја радијална брзина v_r достиже највећу вредност од 60,567 $\mathrm{km\ s}^{-1}$. Према типу спектра маса ове звезде је $\mathfrak{M}_* = 0{,}45\ \mathfrak{M}_\odot$. Ако је узрок периодичне промене радијалне брзине постојање сателита, колика је онда његова маса? Сматрај да се сателит креће по кружници у равни која садржи визуру ($i = 90°$). Период промене радијалне брзине је $P =$

$0{,}553$ година. Каква је природа овог сателита (звезда, $\mathfrak{M} \geq 0{,}08\ \mathfrak{M}_{\odot}$, мрки патуљак, $\mathfrak{M} \in (0{,}01, 0{,}08)$, или планета, $\mathfrak{M} \leq 0{,}01\ \mathfrak{M}_{\odot}$)?

Решење. Када не би било сателита, радијална брзина звезде би имала сталну вредност, која се одређује помоћу познате формуле

$$v_r = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \ , \qquad (4.1)$$

где је c брзина светлости. Примена формуле (4.1) даје $v_r = 59{,}96\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Ова вредност је за 0,607 $\mathrm{km\ s^{-1}}$ мања од највеће забележене вредности. Највећа забележена вредност догађа се када се звезда креће у односу на центар маса у истом правцу и смеру у односу на Сунце као и центар маса чије се хелиоцентрично растојање повећава по стопи од $59{,}96\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Дакле, вишак од 0,607 $\mathrm{km\ s^{-1}}$ једнак је брзини звезде у односу на центар маса. Пошто је нагиб једнак $90°$, тј. $\sin i = 1$, а вишак брзине је једнак кружној брзини u_c, с обзиром на кретање по кружници. Следи

$$u_c = \frac{2\pi r_*}{P} = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{eq}}{r_*}} \quad ,$$

где је r_* растојање звезде од центра маса (за кога се добија $r_* = 1{,}68 \times 10^6$ km), G константа гравитације, а $\mathfrak{M}_{eq}$ тзв. еквивалентна маса, маса за апсолутну орбиту звезде (око центра маса), једнака количнику куба масе сателита и квадрата укупне масе. Она се може одредити и помоћу трећег Кеплеровог закона када су познате вредности за r_* и P. Добијена вредност је $\mathfrak{M}_{eq} = 4{,}6 \times 10^{-6}\ \mathfrak{M}_{\odot}$. Са новом ознаком q, $q = \mathfrak{M}_s/\mathfrak{M}_*$ ($\mathfrak{M}_s$ - маса сателита) за еквивалентну масу се може написати

$$\mathfrak{M}_{eq} = \mathfrak{M}_* \frac{q}{(1+q^{-1})^2} \ .$$

Одавде следи да је маса сателита нешто мања од 0,01 $\mathfrak{M}_{\odot}$. Другим речима, на граници је између мрког патуљка и планете.

5. Дата је двојна звезда за коју је разлика привидних величина компонената $\Delta m_v = 0{,}7$. Болометријске поправке су $(BC)_1 = -0{,}18$ и $(BC)_2 = -0{,}21$ за сјајнију и мање сјајну компоненту, респективно. На фотосфери (занемарљива дебљина) мање сјајне компоненте убрзање гравитације (или јачина поља) је $g_2 = 297{,}8\ \mathrm{N\ kg^{-1}}$, ефективна температура је приближно једнака оној на Сунцу, а маса је $\mathfrak{M}_2 = 0{,}92\ \mathfrak{M}_{\odot}$. Одреди апсолутну болометријску величину за овај звездани систем. За Сунце је $M_{bol\odot} = 4{,}75$.

Решење. Привидна величина за било који филтер дата је изразом

$$m = M + \mathrm{mod} \ ,$$

где је Mодговарајућа апсолутна величина, а mod је модуо растојања (види задатак 3). Пошто звезде припадају двојном систему, модули растојања су им једнаки. Следи да је разлика апсолутних величина једнака разлици привидних, $M_2 - M_1 = 0{,}7$ (филтер V) . Болометријска поправка се дефинише као разлика апсолутних величина, болометријске и визуалне. Постоје две верзије, а овде се, као што се може видети, користи

$$BC = M_{bol} - M_v \ .$$

Следи $\Delta M_{bol} = 0{,}67$. Одавде за однос луминозности следи

$$\log \frac{L_1}{L_2} = 0{,}4(M_{bol2} - M_{bol1}) \ (5.1) \ .$$

Резултат је $L_1 = 1{,}85 \ L_2$. Да би се одредила апсолутна болометријска величина за цео систем потребно је знати укупну луминозност, $L_{tot} = L_1 + L_2$. Јачина поља гравитације на фотосфери дата је изразом

$$g = \frac{G\mathfrak{M}}{R^2} \ .$$

Ознаке: G - константа гравитације, R - полупречник звезде. Користећи списак констаната за Сунце се добија $g_\odot = 274 \ \mathrm{N \ kg^{-1}}$. Имајући у виду дате податке биће $R_2 = 0{,}92 \ R_\odot$. С обзиром на дефиницију луминозности,

$$L = 4\pi\sigma R^2 {T_{eff}}^4 \Longrightarrow L \propto R^2 {T_{eff}}^4 \ ,$$

и околност да је ефективна температура приближно једнака Сунчевој, следи $L_2 = 0{,}8464 \ L_\odot$, што значи да је $L_{tot} = 2{,}85 \ L_2 = 2{,}41 L_\odot$. На основу (5.1), а како је апсолутна величина за Сунце позната, за дати систем је $M_{bol} = 3{,}79$.

Дуги задаци

1. **Звездана карта за Марс.** Познато је да се планирају експедиције на планету Марс. Посетиоцима са Земље добро би дошла звездана карта подешена за употребу на суседној планети. Као и у случају Земље користио би се координатни систем везан за Марсов екватор. Овде ће се то урадити на примеру Сиријуса, најсјајније звезде

нашег неба, чије су координате: $\alpha = 6^{\mathrm{h}}45^{\mathrm{m}}9^{\mathrm{s}}$, $\delta = -16°42'58"$. Одреди аналогне координате Сиријуса за Марс, α_m и δ_m. Познато је: лонгитуда узлазног чвора Марсове орбите, $\Omega = 49°1'4"$, нагиб орбите према еклиптици, $i = 1°51'$, полуправа усмерена ка пролећној равнодневици за Марс са пресечном правом заклапа угао $\zeta = 50°$, а нагиб равни Марсовог екватора према равни његове орбите је $\varepsilon_m = 25°$. Ректасцензију α_m изрази у степенима па њену вредност подели са 360. У којим временским јединицама је у том случају она изражена?

Решење. У првом кораку се рачунају еклиптичке координате Сиријуса λ и β. Користе се познате формуле

$$\sin\beta = \cos\varepsilon \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta \sin\alpha \ ,$$

$$\cos\beta \cos\lambda = \cos\alpha \cos\delta \ ,$$

$$\cos\beta \sin\lambda = \sin\varepsilon \sin\delta + \cos\varepsilon \cos\delta \sin\alpha \ .$$

Овде је ε угао нагиба равни еклиптике према равни екватора (види константе). Добија се: $\lambda = 104°4'51"$, $\beta = -39°35'57"$. Сви наредни кораци састоје се у обртању координатних система. Најпре се координатни систем чија је главна раван (xOy) раван еклиптике обрне око осе z за угао Ω, лонгитуду узлазног чвора Марсове орбите. Следи

$$\cos\lambda' \cos\beta = \cos\beta\,(\cos\lambda \cos\Omega + \sin\lambda \sin\Omega) \ ;$$

$$\sin\lambda' \cos\beta = \cos\beta\,(\sin\lambda \cos\Omega - \cos\lambda \sin\Omega) \ ;$$

јер је

$$x' = x\cos\Omega + y\sin\Omega \ ;$$

$$y' = y\cos\Omega - x\sin\Omega \ ; \quad (6.1)$$

$$z' = z \ .$$

Веза између сферних и правоуглих координата потиче од скраћивања потега, тј. растојања до објекта, у овом случају Сиријуса. Координате $x'y'z'$ важе за посматрача на Марсу, тако да би требало најпре прећи са одговарајућих правоуглих координата за Земљу (оне које одговарају еклиптичким λ и β). Међутим, растојања Сиријуса од Земље и Марса се, практично, не разликују јер је растојање Земља-Марс занемарљиво мало у поређењу са растојањем до Сиријуса. Због тога поступак у овом задатку тече као да се све време ради о истом координатном почетку. Решење је: $\lambda' = 55°3'47"$. Напомена: до истог резултата долази се и уз помоћ цртежа који показује да је $\lambda = \lambda' + \Omega$. Следеће обртање је око осе x' такође у директном смеру за угао i. Поново се примењују формуле (6.1), имајући у виду да је сада $x" = x'$. Нека овако израчунати углови буду означени са $\lambda"$ и $\beta"$; њихове вредности су: $\lambda" = 54{,}15258°$, $\beta" = -41{,}10739°$. У следећем кораку рачунају се еклиптичке координате за Марс, λ_m и β_m. Пошто се обртање врши око осе нормалне на Марсову „еклиптику“, биће $\beta_m = \beta" = -41°6'27"$. Друга координата, λ_m, се добија на исти начин као и λ', само што се сада обртање врши за угао ζ. Следи да су вредности „еклиптичких“ координата за Марс: $\lambda_m = 4°9'9"$, $\beta_m = -41°6'27"$. Последњи корак је да се израчунају одговарајуће екваторске координате. Он је обрнут од почетног. Следи

$$\sin\delta_m = \cos\varepsilon_m \sin\beta_m + \sin\varepsilon_m \cos\beta_m \sin\lambda_m \;;$$

$$\cos\alpha_m \cos\delta_m = \cos\lambda_m \cos\beta_m \,;$$

$$\sin\alpha_m \cos\delta_m = -\sin\varepsilon_m \sin\beta_m + \cos\varepsilon_m \cos\beta_m \sin\lambda_m \;.$$

Небеске екваторске координате звезде Сиријус за планету Марс су: $\alpha_m = 23°32'6"$, $\delta_m = -34°56'48"$. Количник ректасцензије и 360 је 0,06538. Временска јединица у којој је изражен је звездани дан, тј. период обртања, за Марс.

2. **Галаксија NGC 3109.** Галактичке координате галаксије NGC 3109 су: $l = 262°6'$, $b = 23°9'$. Она спада у неправилне галаксије (Irr), налик Магелановим облацима. Као и у Магелановим облацима и у NGC 3109 нађени су плави суперџинови (типично $M_v = -6{,}5$) за које важи: $m_v = 19{,}12$. С обзиром на вредности галактичких координата екстинкција се може занемарити. У случају линије Hα (таласна дужина 656,28 nm) помак у спектру је $\Delta\lambda = 0{,}882$ nm. Привидни пречник NGC 3109 је $\theta = 19{,}1'$. За усвојену обртну симетрију (оса симетрије је нормална на главну раван и продире је у средишту) галаксије визура се налази у њеној главној равни (енгл. израз edge-on). Даље се усваја да је сјајно тело галаксије сфероид (обртни елипсоид) односа оса 0,35. Унутар сфероида неутрални водоник доприноси укупној маси са око 20%, планетарне маглине су веома бројне. Целокупно зрачење NGC 3109 еквивалентно је зрачењу звезда са следећим својствима: $T_{eff} = 5570$ K, $R = 6{,}07 \times 10^8$ m, $BC = -0{,}4$. Просечна површинска концентрација таквих звезда у пројекцији на раван нормалну на главну је $\tilde{n} = 2 \times 10^7\ \mathrm{kpc^{-2}}$. Одреди хелиоцентрично растојање NGC 3109, њену радијалну брзину v_{rad} и привидну величину ове галаксије као целине, m_{vtot}. Коликом се брзином креће NGC 3109 у односу на средиште Млечног пута? Сматрај да је њено кретање у односу на Сунце у потпуности дато радијалном брзином, а за брзину у односу на средиште Млечног пута да је носач вектора брзине права која пролази кроз NGC 3109 и средиште Млечног пута. Сунце, удаљено од средишта Млечног пута 8,5 kpc, у односу на њега се креће брзином од $220\ \mathrm{km\ s^{-1}}$ чији су правац и смер одређени са $l = 90°$, $b = 0°$. За Сунце болометријска апсолутна величина износи 4,75.

Решење. Хелиоцентрично растојање NGC 3109 је једнако растојању њених суперџинова. За њих се лако налази модуо растојања, по дефиницији разлика $m_v - M_v$. С друге стране, пошто је екстинкција занемарљива, биће

$$m_v - M_v = 19{,}12 + 6{,}5 = 5\log s - 5\,.$$

Резултат је $s = 1{,}33$ Mpc. Радијална брзина се одређује помоћу познате формуле

$$v_{rad} = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\ ,$$

где је c брзина светлости, а λ_0 таласна дужина дате линије. Добија се $v_{rad} = 402{,}9\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. До, практично, истог резултата би се дошло и применом тачније, релативистичке, формуле јер је помак $\Delta\lambda$ мали у поређењу са таласном дужином линије. За одређивање кретања у односу на средиште Млечног пута треба најпре ослободити управо израчунату радијалну брзину утицаја Сунчевог кретања. Брзина Сунчевог кретања се множи косинусима праваца, $220 \times \cos\Delta l \cos\Delta b$; ознака Δ указује на разлике углова. Прва разлика, Δl, једнака је $262{,}1 - 90$, а друга, Δb, $23{,}15°$, јер је за Сунчево кретање $b = 0$. Поправка је $-200{,}37\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Дакле, удаљавање NGC 3109 у односу на средиште Млечног пута дуж визуре је $202{,}53\ \mathrm{km\ s^{-1}}$, остатак до $402{,}9\ \mathrm{km\ s^{-1}}$ потиче од кретања Сунца. Сада брзину чија је ово вредност треба пројектовати на правац ка средишту Млечног пута. У ту сврху треба најпре одредити положај NGC 3109 у односу на средиште Млечног пута. Правоугле координате у односу на Сунце су

$$x = s\cos l\cos b\ \ ,$$

$$y = s\sin l\cos b\ \ ,$$

$$z = s\sin b\ \ .$$

Добијене вредности - $x = -0{,}168$ Mpc, $y = -1{,}211$ Mpc, $z = 0{,}523$ Mpc – се преводе у одговарајуће координате у односу на средиште Млечног пута: X, Y, Z. С обзиром на то да је са $l = 0$ одређен смер ка средишту Млечног пута, само ће се X разликовати од x, тј. $X = -(168 + 8{,}5) = 176{,}5$ kpc. Одговарајуће растојање до средишта Млечног пута је $\Re = 1{,}33$ Mpc. Овакав резултат не треба да буде чудан јер хелиоцентрично растојање NGC 3109 далеко превазилази растојање Сунца од средишта Млечног пута. Следи да је у троуглу OSG чија су темена средиште Млечног пута, Сунце и галаксија NGC 3109, респективно, угао код темена G занемарљиво мали, тј. његов косинус једнак 1. Последица је да је компонента брзине NGC 3109 у односу на средиште Млечног пута дуж праве која спаја њу и то средиште једнака $202{,}53\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Пошто су модуо растојања и болометријска поправка познати, за одређивање привидне величине m_{vtot} треба одредити болометријску апсолутну величину, тј. луминозност L_{eq} и укупан број еквивалентних звезда N. Прва величина је дата на следећи начин

$$L_{eq} = 4\pi\sigma R^2 {T_{eff}}^4 \ .$$

Ознаке су познате, σ је Штефан-Болцманова константа чија се вредност налази у таблици констаната. У истој таблици је луминозност Сунца, стога је $L_{eq} = 0{,}66\ L_{\odot}$. Са познатом формулом

$$\log L_{eq} = 0{,}4\big(4{,}75 - M_{boleq}\big) \ ,$$

добија се $M_{boleq} = 5{,}2$, следи да је одговарајућа вредност $M_{veq} = 5{,}6$. Зрачење такве звезде за филтер V је

$$\log I_{veq} = 0{,}4\big(4{,}82 - M_{veq}\big)\,, \quad (7.1)$$

јер знамо одговарајућу апсолутну величину Сунца (константе), $I_{veq} = 0{,}49\ I_{v\odot}$. Укупан број звезда је

$$N = \tilde{n}S\ ,$$

где је S површина. Због сфероидне геометрије површина S ће бити површина елипсе јер тако изгледа пројекција на раван нормалну на главну. Однос оса је познат (0,35), треба само израчунати дужину велике полуосе a. Визура се налази у главној равни, а угаони пречник је дат; следи

$$a = \frac{1}{2}\theta(\mathrm{rad})s(\mathrm{kpc}) = 3{,}695\ \mathrm{kpc}\,.$$

Онда је површина $S = \pi ab = \pi \times 0{,}35a^2 = 15{,}01\ \mathrm{kpc}^2$, па је број звезда $N = 3 \times 10^8$, а укупно зрачење за филтер V $1{,}47 \times 10^8\ I_{v\odot}$. Поновна примена формуле (7.1) даје $M_{vtot} = -15.6$. С обзиром на модуо растојања од 25,62 ово значи $m_{vtot} = 10{,}02$.

Напомена. До истог резултата се долази и преко укупне луминозности којој одговара апсолутна величине једнака -16, те је такође $M_{vtot} = -15.6$.

ОБРАДА ПОДАТАКА

1. Разматрају се положаји планета Венере и Земље. У почетном тренутку Земља се налази у перихелу, а Венера је у доњој конјункцији, тј. на правој која пролази кроз Земљу и Сунце, између њих. Нагиб према равни еклиптике и ексцентричност Венерине орбите се занемарују; дужина велике полуосе је $a_v = 0{,}72$ aј. Дати подаци су: време (t) изражено у годинама (земаљским), права аномалија, тј. угао који вектор положаја заклапа са правцем ка перихелу (ν), изражена у степенима и хелиоцентрично растојање Земље r (aј). У тренутку $t = 0$ вредност лонгитуде Сунца је $\lambda_{\odot}(0) = 282°$.

t	0	0,162	0,247	0,329	0,50	0,67	0,747	0,837	1,00
ν	0	59,4	91,0	119,0	180,0	240,6	269,0	301,0	360,0
r	0,983	0,991	1,00	1,008	1,017	1,008	1,00	0,991	0,983

За сваки дати положај израчунај паралаксу и небеске екваторске координате Венере. Разлике између аномалистичке, звездане и тропске године се занемарују.

Решење. Треба нацртати слику у којој је са S означено Сунце, које се налази у средишту Венерине орбите. Кроз тачку S се повлачи апсидна линија Земљине орбите, имајући у виду да је Земља у перихелу у почетном тренутку. Положаји Земље се одређују из датих вредности праве аномалије и растојања. Да би се одредио било који положај Венере треба одредити угао који она пређе за дато време. Тај угао је једнак производу угаоне брзине и времена, односно $(360/P)t$, где је P период обиласка Венере који се може одредити помоћу трећег Кеплеровог закона $\left(P = {a_v}^{3/2}\right)$, тако да се добија $P = 0{,}611$ година. Са уцртаним положајима Сунца, Венере и Земље за сваки тренутак има се троугао SEV чија су остала два темена Земља и Венера. Угао код темена S се налази као разлика углова за Венеру и Земљу. На овај начин позната су три елемента троугла. Дужина дужи EV се одређује помоћу косинусне теореме. То је растојање између Земље и Венере, r_v, изражено у астрономским јединицама. Када је оно познато, позната је и паралакса Венере p. Формула гласи

$$p = \frac{\pi_{\odot}}{r_v} \ ,$$

где је $\pi_{\odot}$ паралакса Сунца (константе). Пример: $t =$0,162 године, $\nu = 59{,}4°$; следи да је угао за Венеру $\psi = (0{,}162/0{,}611)360 = 95{,}45°$, угао код S је онда $95{,}45 - 59{,}4 = 36{,}05°$, а дужине познатих страница су 0,72 ај и 0,991 ај и примена косинусне теореме даје $r_v = 0{,}59$ ај, па је одговарајућа вредност $p = 14{,}935"$.

Да би се одредиле небеске екваторске координате Венере потребне су њене еклиптичке координате, лонгитуда λ и латитуда β. С обзиром на занемаривање нагиба ова друга је једнака нули. Лонгитуда се налази из троугла SEV применом синусне теореме јер је угао код темена Е (Земља) једнак разлици лонгитуда $|\lambda - \lambda_\odot|$. С обзиром на чињеницу да се оријентација дужи SE може изразити преко лонгитуде Сунца и праве аномалије, тренутна лонгитуда Сунца се рачуна на следећи начин

$$\lambda_\odot = \lambda_\odot(0) + \nu\,, \qquad \lambda \leq 360° \;;$$

$$\lambda_\odot = \lambda_\odot(0) + \nu - 360° \;,\;\; \lambda > 360° \;.$$

Три величине, ν, $\lambda_\odot$ и r, су периодичне функције времена. Њихови периоди су звездана година (за вредност вид. константе), тропска година (за вредност вид. константе) и аномалистичка година, респективно. Међутим, као што је горе речено, ове три године се сматрају једнаким. Због тога се лонгитуда Сунца може рачунати на овај начин. Приликом одређивања Венерине лонгитуде, пошто се добија из разлике, треба имати у виду да овај угао гледано са Земље расте у директном смеру (у коме планете обилазе око Сунца). Небеске екваторске координате Венере одређују се применом сферне тригонометрије (за опште формуле вид. константе) те имамо

$$\sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\sin\lambda\cos\beta \;\;,$$

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta \;\;,$$

$$\sin\alpha\cos\delta = -\sin\varepsilon\sin\beta + \cos\varepsilon\sin\lambda\cos\beta\;.$$

Овде је ε нагиб између равни екватора и еклиптике (константе), а с обзиром на раван еклиптике ($\beta = 0$) имаћемо

$$\sin\delta = \sin\varepsilon\sin\lambda \;\;,$$

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\,,$$

$$\sin\alpha\cos\delta = \cos\varepsilon\sin\lambda\,.$$

Таблица (одговор)

t	0	0,162	0,247	0,329	0,50	0,67	0,747	0,837	1,00

ν	0	59,4	91,0	119,0	180,0	240,6	269,0	301,0	360,0
r	0,983	0,991	1,00	1,008	1,017	1,008	1,00	0,991	0,983
p	33,438	14,935	10,642	8,183	5,980	5,218	5,128	5,168	5,665
α	18,87	19,82	22,0	0,04	4,96	10,26	12,45	15,04	20,32
δ	$-22{,}89$	$-21{,}05$	$-12{,}23$	0,28	22,65	10,81	$-2{,}89$	$-17{,}22$	$-19{,}58$

2. Релација позната под именом маса-сјај игра важну улогу у астрономији. То је емпиријска релација и важи за звезде главног низа Херцшпрунг-Раселовог дијаграма. Масе звезда које припадају двојним и вишеструким системима, дакле одређене динамички, доводе се у везу са њиховим сјајем. У следећој таблици за један број звезда главног низа дате су масе ($\mathfrak{M}$), привидне величине (m_{v0}) поправљене за међузвездану екстинкцију, паралаксе (π) и болометријске поправке (BC).

Звезда	$\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}_{\odot}$)	m_{v0}	$\pi('')$	BC
1	64,0	1,8	0,004	$-4{,}4$
2	8,6	2,5	0,0125	$-1{,}94$
3	5,3	3,9	0,012	$-1{,}46$
4	2,9	2,2	0,031	$-0{,}8$
5	2,2	5,8	0,017	$-0{,}17$
6	1,8	5,9	0,021	$-0{,}1$
7	1,2	5,6	0,030	$-0{,}09$
8	1,0	10,0	0,008	$-0{,}2$
9	0,9	6,7	0,045	$-0{,}21$
10	0,8	8,9	0,018	$-0{,}23$
11	0,75	11,2	0,009	$-0{,}36$
12	0,72	10,9	0,011	$-0{,}38$
13	0,69	11,3	0,014	$-0{,}7$
14	0,66	11,9	0,015	$-0{,}86$
15	0,62	12,1	0,016	$-1{,}01$
16	0,58	11,9	0,019	$-1{,}2$
17	0,55	9,6	0,07	$-1{,}39$

Конструиши график тако да на апсциси буде логаритам масе, а на ординати одговарајући логаритам луминозности (L - јединица $L_{\odot}$). Болометријска апсолутна величина Сунца: $M_{bol\odot} = 4{,}75$. Да ли логаритамска зависност указује на неку приближну зависност луминозности од масе? Ако је одговор потврдан, одреди вредност изложиоца.

Решење. Луминозност, величину која се налази на ординати, треба израчунати. Пошто је дата тригонометријска паралакса, може да се израчуна тзв. модуо растојања, а то је разлика привидне и апсолутне величине

$$m_{v0} - M_v = -(5 + 5\log\pi)\,.$$

Ово је нулти модуо растојања јер је привидна величина ослобођена екстинкције. Са датом болометријском поправком, BC, рачуна се болометријска апсолутна величина

$$BC = M_{bol} - M_v\,.$$

Овде треба напоменути да се болометријска поправка дефинише и на обрнут начин, тако да две апсолутне величине замене места. Међутим, у том случају важи $BC \geq 0$. даље се луминозност добија на основу добро познате релације

$$\log\frac{L}{L_\odot} = 0{,}4\left(M_{bol\odot} - M_{bol}\right)\,.$$

Сачинићемо нову таблицу, сличну датој горе, али са три стубца: број звезде, логаритам масе и логаритам луминозности.

Звезда	$\log\mathfrak{M}$	$\log L$
1	1,806	5,736
2	0,934	3,482
3	0,724	2,766
4	0,462	2,357
5	0,342	1,187
6	0,255	0,936
7	0,079	0,742
8	0,0	0,174
9	$-0{,}046$	$-0{,}002$
10	$-0{,}097$	$-0{,}079$
11	$-0{,}125$	$-0{,}344$
12	$-0{,}143$	$-0{,}391$
13	$-0{,}161$	$-0{,}632$

14	$-0{,}180$	$-0{,}868$
15	$-0{,}208$	$-0{,}944$
16	$-0{,}237$	$-0{,}938$
17	$-0{,}260$	$-1{,}074$

График је права линија са коефицијентом правца једнаким око 3,9. Скоро исти резултат био би и са вредношћу 3,8, те се и он може прихватити. Дакле, $\log L = k \log \mathfrak{M}$, $k = 3{,}85 \pm 0{,}05$.

ПОСМАТРАЊЕ

1. На звезданој карти датој у хоризонтском координатном систему обележи положај тачке пролећне равнодневице. Напиши приближне вредности њених хоризонтских координата. Звездана карта показује део неба над Београдом 1. јуна 2013. године у 20 часова по UT (на карти је уписано летње време). Са карте је уклоњено тло које заклања небо над хоризонтом. Азимут на карти (A_A) је дат по англо-саксонском систему; трансформација на наш (A) се врши по формули: $A = A_A + 180°$. Тачке запада, севера и истока на хоризонту су означене ћириличним словима З, С и И, тим редом.
   Помоћ: Месечева еклиптичка латитуда је око $4°$.

Решење. Тачка пролећне равнодневице (γ-тачка) се налази у пресеку небеског екватора и еклиптике. Прво ћемо скицирати небески екватор и зато су нам потребне најмање три тачке. На карти су обележене две од њих: тачка истока ($A_A = 90°$, $h = 0°$) и тачка запада ($A_A = 270°$, $h = 0°$). Трећа тачка коју треба уцртати је северна тачка на екватору која има исти азимут као и северна тачка на хоризонту (на карти означена словом „С“), а чија је висина једнака $-(90° - \varphi)$. Северна тачка на екватору мора бити испод хоризонта јер гледамо северну страну неба. Еклиптику приближно провлачимо кроз планете, Сунце и $4°$ ниже од Месеца. Треба прочитати са карте хоризонтске координате пресека и трансформисати азимут на наш начин рачунања. Тачне вредности хоризонтских координата γ-тачке су: $A_\gamma = 220°$, $h_\gamma = -37°$.