РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2019

ТЕОРИЈА

Кратки задаци

1. Последње помрачење Сунца у Београду, 20. марта 2015. године, почело је у $9^{\mathrm{h}}39^{\mathrm{m}}$ по времену које се тада примењивало и завршило се у $11^{\mathrm{h}}59^{\mathrm{m}}$. У тренутку када је помрачење почело звездано време у Паризу ($\lambda_p = 2°20'55"$ – исток) било је $s_p = 20^{\mathrm{h}}38^{\mathrm{m}}38^{\mathrm{s}}$. Одреди звездано време у Београду у тренутку завршетка помрачења. Географска дужина Београда: $\lambda_b = 20°27'26"$.

Решење. Разлика географске дужине између Београда и Париза је $\Delta\lambda = 18°6'31"$. Одговарајућу разлику звезданих времена Δs добијамо из познате пропорције

$$\frac{\Delta\lambda}{360} = \frac{\Delta s}{P_{sd}} \ ,$$

где је P_{sd} период обртања Земље или звездани дан ($P_{sd} = 23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}4^{\mathrm{s}}$). За наш задатак погодније је да рачунамо у јединицама звезданог времена по којима је $P_{sd} = 24^{\mathrm{h}}0^{\mathrm{m}}0^{\mathrm{s}}$. Тако добијамо $\Delta s = 1^{\mathrm{h}}12^{\mathrm{m}}43^{\mathrm{s}}$, па је одговарајуће звездано време у Београду $s_{bb} = 21^{\mathrm{h}}51^{\mathrm{m}}21^{\mathrm{s}}$. Помрачење је у Београду трајало $2^{\mathrm{h}}20^{\mathrm{m}}$, али у јединицама Сунчевог времена (средњи дан једнак 24 часа).Стога, треба овај временски размак претворити у јединице звезданог времена. Пошто звездани дан траје краће од средњег дана по Сунцу, звездане јединице су мање и множе се константом која је приближно једнака 1,0027 – добија се као количник трајања тропске године, $366{,}2422/365{,}2422$, или као количник трајања средњег дана и звезданог дана. Звездано време у Београду у тренутку завршетка помрачења је $s_{be} = 0^{\mathrm{h}}11^{\mathrm{m}}44^{\mathrm{s}}$.

2. Период обиласка Месеца око Земље износи 27 дана $7^{\mathrm{h}}43{,}1^{\mathrm{m}}$ у јединицама средњег времена (по Сунцу). Дужина велике полуосе орбите Марсовог сателита Деимоса је 23.463 km. Колики је период обиласка овог сателита у средњим Сунчевим данима? Средња густина планете Марс је 0,709 средњих густина Земље,

а његов полупречник 0,53 Земљиних полупречника. Сматрај да су Земља и Марс лоптаста тела.

Решење. Трећи Кеплеров закон примењен на кретање сателита гласи

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G\mathfrak{m}}{4\pi^2} \ .(1)$$

Ознаке: G – гравитациона константа, π - универзална константа, $\mathfrak{m}$ – маса централног тела (планете), a – дужина велике полуосе, и P - период обиласка. Из формуле (1) проистиче да је однос a^3/P^2 сразмеран маси централног тела, а то су Земља у случају Месеца и Марс у случају Деимоса. Ако се овај однос означи са x, добија се следећи израз

$$\frac{x_d}{x_l} = \frac{\mathfrak{m}_m}{\mathfrak{m}_e} \ ,$$

где се индекси d, l, m и e односе на Деимос, Месец, Марс и Земљу, респективно. Однос маса Марса и Земље налазимо из датих података за средњу густину и полупречник имајући у виду лоптаст облик

$$\frac{\mathfrak{m}_m}{\mathfrak{m}_e} = \frac{\rho_m}{\rho_e}\frac{V_m}{V_e} = \frac{\rho_m}{\rho_e}\frac{\frac{4}{3}\pi {R_m}^3}{\frac{4}{3}\pi {R_e}^3} = \frac{\rho_m}{\rho_e}\frac{{R_m}^3}{{R_e}^3} = 0{,}709 \cdot\ 0{,}53^3 \ .$$

Однос маса планета је 0,106. Однос дужина великих полуоса је познат (за Месец дато у константама), те онда следи да период обиласка Деимоса износи 1,27 средњих Сунчевих дана.

3. Зна се да многе звезде творе своју енергију путем реакције два протона. Колика је почетна релативна брзина потребна за два протона који се крећу праволинијски један у сусрет другом да би могли да се приближе на растојање $r_c = 10^{-15}$ m? Какав је физички смисао оволиког растојања? Елементарно наелектрисање $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, диелектрична константа за вакуум $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2 m^{-2} N^{-1}}$, маса протона $\mathfrak{m}_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

Решење. Задатак треба решавати у инерцијалном координатном систему. Пошто се тражи релативна брзина, најбоље је референтни систем везати за један од два протона. У том случају се тај протон мора ослободити убрзања. Према Кулоновом закону између два протона, на међусобном растојању r у вакууму, делује одбојна сила интензивности

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}.$$

Одавде следи да ће убрзање једног протона бити

$$a = \frac{1}{\mathfrak{m}_p}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}.$$

Убрзања протона имају супротан смер и зато ће убрзање онога „који се креће“ у референтном систему везаном за „непокретни“ протон имати двоструко већу интензивност, тј.

$$a_{rel} = 2\,\cdot\,\frac{1}{\mathfrak{m}_p}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}.$$

Последњи израз можемо да назовемо специфичном (по јединици масе) силом. Она је потенцијална јер зависи само од положаја (конкретно од растојања). Одговарајући потенцијал (потенцијална енергија по јединици масе) је

$$\Phi = C - \frac{1}{2\pi}\frac{e^2}{\varepsilon_0\mathfrak{m}_p}r^{-1}\,,(1)$$

где је C произвољна константа. Потенцијал Φ је стационаран јер време не фигурише у изразу за њега. Последица тога је одржање (непромењивост са временом) специфичне (по јединици масе) енергије:

$$E = \frac{1}{2}{v_{rel}}^2 + \Phi = \mathrm{const}\,.(2)$$

Сматра се да су протони у почетном тренутку на растојању далеко већем од датог r_c. Стога се потенцијал на тако великом растојању занемарује. С друге стране, најмање што је потребно да протони доспеју на међусобно растојање једнако r_c је да релативна брзина протона буде једнака нули! Тада једначина (2), с обзиром на једначину (1), постаје

$$\frac{1}{2}{v_{rel}}^2(r_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^2}{\varepsilon_0\mathfrak{m}_p}{r_c}^{-1}\,.\quad(3)$$

Другим речима, разлика специфичних кинетичких енергија једнака је разлици потенцијала. Замена вредности у израз (3) даје: $v_{rel}(r_0) = 2{,}35\times10^7\ \mathrm{m\ s^{-1}}$. Физички смисао датог растојања r_c је да унутар њега јака нуклеарна сила (привлачна) надјачава електростатичку силу (одбојна, јер су наелектрисања истоимена).

4. Сунце и Месец су два привидно најсјајнија небеска тела. Процени однос количина њихових укупних израчених енергија по јединици површине које доспевају до Земље под условом да је Месец у пуној фази (пун месец). Коликој разлици звезданих величина одговара овај однос?

Решење. Луминозност је укупна израчена енергија у јединици времена. За Сунце она износи (константе) $L_\odot = 3{,}83 \times 10^{26}$ W. Растојање система Земља-Месец од Сунца изражено у јединицама Међународног система (константе) је $a = 1{,}5 \times 10^{11}$ m. Следи да ће на ово растојање на јединицу површине доспети

$$f_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi a^2} = 1{,}35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2} \, .$$

У питању је пун просторни угао, 4π стерадијана, зато је у имениоцу површина сфере. Знамо да Месец светли тако што одбија Сунчеву светлост. У фази пуног месеца величина $f_\odot$ доспева на површину Месечевог диска једнаку $\pi {R_m}^2$ (полупречник Месеца - вид. константе – износи $R_m = 1{,}738 \times 10^6$ m). Колика је укупна енергија зрачења коју Месец одбија у јединици времена зависи и од његовог албеда ($A = 0{,}14$, вид. константе). Дакле, луминозност пуног месеца је

$$L_m = A f_\odot \pi {R_m}^2 = 1{,}79 \times 10^{15} \text{ W} \, .$$

На јединицу површине на Земљи са Месеца у јединици времена стиже светлосна енергија

$$f_m = \frac{L_m}{4\pi {a_1}^2} \, ,$$

где је a_1 растојање између Земље и Месеца, $a_1 = 3{,}84 \times 10^8$ m (константе). Тражени однос енергија по јединици површине доспелих на Земљу у јединици времена је онда

$$\rho = \frac{f_\odot}{f_m} = \frac{L_\odot {a_1}^2}{L_m a^2} = 1{,}4 \times 10^6 \, .$$

Да би се ово изразило преко разлике звезданих величина треба га најпре логаритмовати па поделити са 0,4, што проистиче из дефиниције звездане величине, $\log \rho / 0{,}4 = 15{,}37$.

5. У звезданој астрономији се дефинише величина која служи као индикатор хемијског састава звезда и назива се *металичност*. Сви хемијски елементи чији су атоми масивнији од два најраспрострањенија елемента, водоника (H) и хелијума (He), називају се металима. Нека су X, Y и Z традиционалне ознаке за удео водоника, хелијума и метала,

респективно, где се овај удео (проценат) може дефинисати на два начина: по маси и по броју атома. Ознака и дефиниција металичности су

$$[\mathrm{Met/H}] = \log \frac{\left(\frac{Z}{x}\right)_*}{\left(\frac{Z}{X}\right)_\odot} \ .$$

Овде се ознака Met односи на неки произвољан метал који има одређени масени број и представља све метале. Индекси $*$ и $\odot$ односе се на објекат чија нас металичност интересује и Сунце, респективно. Дата је звезда за коју важи $[\mathrm{Met/H}] = -1$ (ова величина одређена је према броју атома хемијског елемента) и $Y_* = 0{,}24$ (ова величина одређена је према уделу у укупној маси). Одреди X_* и Z_* према уделу у укупној маси као што је и Y_*. Удели водоника и хелијума у укупној маси Сунца су $X_\odot = 0{,}73$ и $Y_\odot = 0{,}25$.

Решење. Премда се величине X, Y и Z могу односити како на број атома, тако и на масу, то, као што се види из следећег разматрања, не утиче на вредност металичности. Нека је N укупан број свих атома; тада би било $X = N_H/N$, $Y = N_{He}/N$, $Z = N_{met}/N$. У случају да се величине односе на уделе у укупној маси $\mathfrak{M}$, биће: $X = \mathfrak{M}_H/\mathfrak{M}$, $Y = \mathfrak{M}_{He}/\mathfrak{M}$, $Z = \mathfrak{M}_{met}/\mathfrak{M}$; осим тога је: $\mathfrak{M}_H = N_H \mathfrak{m}_H$, $\mathfrak{M}_{He} = N_{He}\mathfrak{m}_{He}$, $\mathfrak{M}_{met} = N_{met}\mathfrak{m}_{met}$, где су $\mathfrak{m}_H$, $\mathfrak{m}_{He}$ и $\mathfrak{m}_{met}$ масе атома водоника, хелијума и метала, респективно. У случају удела по маси биће $Z/X = (N_{met}/N_H)(\mathfrak{m}_{met}/\mathfrak{m}_H)$. Пошто у формули за металичност однос Z/X фигурише два пута, једном за звезду једном за Сунце, однос атомских маса $(\mathfrak{m}_{met}/\mathfrak{m}_H)$ ћес е појавити и у бројиоцу и у имениоцу; значи скратиће се јер се атомске масе елемената не разликују од звезде до звезде. Пошто је за дату звезду $[\mathrm{Met/H}] = -1$, а околност да је ова вредност утврђена по броју атома није од значаја, из дефиниције следи

$$\frac{\left(\frac{Z}{X}\right)_*}{\left(\frac{Z}{X}\right)_\odot} = 0{,}1 \ .$$

Познате вредности за Сунце нам дају $(Z/X)_\odot = 0{,}02/0{,}73 = 0{,}0274$; следи $(Z/X)_* = 0{,}0274 \times 0{,}1 = 0{,}00274$. Како према поставци задатка имамо само три хемијска елемента – водоник, хелијум и „метал“ – мора бити

$$X + Y + Z = 1 \ .$$

Са датом вредношћу за звезду $Y = 0{,}24$ се образује систем од две једначине са две непознате

$$Z/X = 0{,}00274 \ ;$$

$$X + Z = 0{,}76 \quad ,$$

чије је решење $X = 0{,}758$, $Z = 0{,}002$.

Дуги задаци

1. **Видљивост Марса.** У почетном тренутку Марс се налази у перихелу своје орбите и у опозицији у односу на Земљу. Какви ће бити услови видљивости ове планете (висина изнад хоризонта у тренутку горње кулминације и доба дана) за посматрача на Земљиној северној хемисфери на око 45° географске ширине у тренутку, t_a, када она први пут доспе на хелиоцентрично растојање једнако дужини велике полуосе своје орбите? Сунчеве координате у тренутку t_a су $\alpha_\odot = 2^\mathrm{h}36^\mathrm{m}20^\mathrm{s}$, $\delta_\odot = 15°17'16"$? Дужина велике полуосе Марсове хелиоцентричне орбите износи 1,52 ај, а ексцентричност 0,093. Ексцентричност Земљине орбите и нагиб равни Марсове орбите у односу на раван еклиптике се занемарују.

Решење. Опозиција значи да се у почетном тренутку Сунце, Земља и Марс, тим редом, налазе на истој полуправој чија је почетна тачка у Сунцу. Обилазећи око Сунца у истом смеру као и Земља (директни смер) Марс ће се први пут после почетног тренутка на хелиоцентричном растојању једнаком дужини велике полуосе своје орбите наћи после времена t_a (почетни тренутак $t = 0$). Време t_a ћемо одредити користећи други Кеплеров закон према коме је површина сразмерна одговарајућем времену. Када је растојање неке тачке на елипси од било које жиже једнако дужини велике полуосе, тада је растојање те тачке од средишта елипсе једнако дужини мале полуосе; одговарајућа површина једнака је разлици површина четвртине елипсе и правоуглог троугла OSM (O – средиште елипсе, S - жижа у којој се налази Сунце и M - положај Марса), па следи

$$\Delta S = \frac{1}{4}\pi a^2 \sqrt{1-e^2} - \frac{1}{2}a^2 e\sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\pi}{2} - e\right),$$

где је a дужина велике полуосе, а e ексцентричност елипсе (има се у виду да је површина оивичена елипсом једнака $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$). Површина ΔS одговара временском размаку t_a, а површина оивичена елипсом S периоду P. Следи пропорција

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\pi}{2} - e\right)}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} = \frac{t_a}{P} \ ,$$

тј.

$$t_a = \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi}\right) P \ \ .$$

Да бисмо нашли период примењујемо трећи Кеплеров закон у облику

$$\frac{a^3}{P^2} = \mathfrak{M}_\odot \ ,$$

где су дужина велике полуосе и период изражени у астрономским јединицама и годинама, респективно. Добија се: $P = 1{,}874$, $t_a = 0{,}441$ година. На цртежу повучемо кружницу око тачке S чији је полупречник једнак 1 ај, то ће бити Земљина орбита, а због равномерног кружног кретања Земља ће за време t_a прећи угао од 0,441$\times\ 2\pi = 2{,}769$ rad ($158°39'$ - суплементан угао $21°21'$). То је угао између апсидне линије Марсове путање и Земљиног вектора положаја, Земљу означимо тачком E. С друге стране, за Марсову орбиту дужина мале полуосе и производ ea (растојање OS) износе 1,513 ај и 0,141 ај, респективно. Њихов однос једнак је тангенсу угла код темена S (Сунце) у правоуглом троуглу OSM; угао је једнак $84°40'$. Сада прелазимо на разматрање троугла ESM. Угао код темена S једнак је разлици $84°40' - 21°21' = 63°19'$. Дакле, за троугао ESM позната су три елемента (дужи ES и SM и угао код S), што дозвољава да се он реши. Потребан је угао код темена E јер је то разлика лонгитуда Марса и Сунца (Марсова треба да буде већа јер лонгитуда расте у директном смеру). Најпре се примени косинусна теорема у циљу налажења дужине странице EM, а онда из синусне теореме следи

$$\sin\vartheta = \frac{a}{\Delta}\sin\gamma \ \ ,$$

где је слово ϑ ознака за угао код темена E, а слово γ за угао код темена S; a је дужина велике полуосе орбите Марса, а Δ дужина странице EM. Тако долазимо до резултата да је угао код темена E једнак $76°51'$. Пошто су небеске екваторске координате Сунца познате, може се израчунати његова лонгитуда $\lambda_\odot$. У ту сврху користе се формуле сферне тригонометрије (види константе) примењене на случај претварања небеских екваторских у еклиптичке координате, тј.

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\alpha\cos\delta \ ,$$

$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\varepsilon\sin\delta + \cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha \ ;$$

где је ε нагиб еклиптике према екватору (константе). С обзиром на то да је тело Сунце, важи $\beta = 0$. Резултат је $\lambda_\odot = 41°31'$. Следи да је исто за Марс $\lambda_m = 118°22'$. Поново се враћамо формулама сферне тригонометрије, овог пута у примени на претварање еклиптичких у небеске екваторске координате. Због занемаривања нагиба равни Марсове орбите важи $\beta_m = 0$. Формуле су

$$\sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda\,,$$

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta\,,$$

$$\sin\alpha\cos\delta = -\sin\varepsilon\sin\beta + \cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda\,.$$

Тако добијамо вредности за Марсове координате: $\alpha_m = 8^{\mathrm{h}}1^{\mathrm{m}}54^{\mathrm{s}}$, $\delta_m = 20°28'59"$.

Какав закључак можемо да извучемо о видљивости Марса за ове координате на северној хемисфери у горњој кулминацији? На датој географској ширини висина би износила око 65,5° ($h = 90 - \varphi + \delta$). Међутим, по Сунчевој ректасцензији се види да се ради о пролећу, тј. да је тада на северној хемисфери обданица дужа од ноћи. Разлика ректасцензија ($\alpha_m - \alpha_\odot$) од око 5,5 часова и околност да је Марс у горњој кулминацији значе да је толики и часовни угао Сунца. Следи да би оно било још увек изнад хоризонта јер је часовни угао залаза већи од 6 часова. Дакле, услови видљивости Марса нису повољни.

2. **Цефеида.** Дата је цефеида чији је период промене сјаја P_L једнак 9,84 дана. Цефеиде пулсирају (мењају запремину, тј. полупречник) тако да су им полупречник и сјај у супротној фази. Познато је да су екстремне вредности привидне визуалне величине у овом периоду $m_{v1} = 3{,}94$ и $m_{v2} = 4{,}66$. Таласна дужина максимума зрачења се креће између $\lambda_1 = 531{,}0$ nm и $\lambda_2 = 649{,}1$ nm. Средња вредност апсолутне визуалне величине зависи од периода пулсација на следећи начин (релација Хенријете Ливит):

$$\overline{M_v} = -1{,}5 - 1{,}74\log P_L\,,$$

при чему се период изражава у данима. За средњу вредност сматрај да је дата као аритметичка средина екстремних. Зрачење је у складу са Планковим законом, вредност Винове константе је $b = 2{,}9 \times 10^{-3}$ mK. Зависност болометријске поправке BC од ефективне температуре T дата је у таблици (примени линеарну интерполацију).

T [10^3 K]	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
BC	−2,70	−1,75	−0,87	−0,50	−0,33	−0,20	−0,14	−0,10	−0,05
T [10^3 K]	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0			
BC	−0,08	−0,08	−0,14	−0,23	−0,32	−0,44			

Одреди екстремне вредности полупречника R_{min} и R_{max}. Специфична међузвездана екстинкција за правац ка овој цефеиди у филтеру V је $\alpha_v = 0{,}5\ \mathrm{kpc}^{-1}$. Дај грубу процену хелиоцентричног растојања ове цефеиде. Апсолутна болометријска величина Сунца је $M_{bol\odot} = 4{,}75$.

Решење. Примена релације Х. Ливит даје $\overline{M_v} = -3{,}23$. Аритметичка средина екстремних вредности привидних величина је $\overline{m_v} = 4{,}3$; следи да је модуо растојања $\overline{m_v} - \overline{M_v} = 4{,}3 - (-3{,}23) = 7{,}53$. Израчунаћемо граничне вредности апсолутне визуалне величине цефеиде: када јој је луминозност највећа, $M_{v1} = m_{v1} - 7{,}53 = 3{,}94 - 7{,}53 = -3{,}59$, тј. када је луминозност најмања, $M_{v2} = m_{v2} - 7{,}53 = 4{,}66 - 7{,}53 = -2{,}87$. Ефективне температуре које одговарају максимумима зрачења се рачунају преко Виновог закона

$$T = \frac{b}{\lambda}\ .$$

Следи да су ефективне температуре $T_1 = 5461$ K и $T_2 = 4468$ K. Користећи дату зависност болометријске поправке од ефективне температуре налазимо да овим температурама одговарају болометријске поправке $BC(T_1) = -0{,}21$ и $BC(T_2) = -0{,}50$. У вези корака линеарне интерполације узима се као пример $BC(T_1)$. Треба је тражити за температуре између 5000 K и 5500 K. Распон је 500 K, а вредности за BC се налазе између $-0{,}33$ и $-0{,}20$, распон је $0{,}13$. Постављамо пропорцију 0,13 : 500= x : $(5500 - 5461) \Longrightarrow x = (0{,}13 \cdot 39)/500 = 0{,}01$. BC на том делу расте приближавајући се ка граничној вредности од $-0{,}20$, зато је $BC(T_1) = -0{,}1 - 0{,}20 = -0{,}21$. Сада можемо да израчунамо екстремне вредности апсолутне болометријске величине: $M_{bol1} = BC(T_1) + M_{v1} = -0{,}21 + (-3{,}59) = -3{,}80$, тј. $M_{bol2} = BC(T_2) + M_{v2} = -0{,}50 + (-2{,}87) = -3{,}37$. Овим апсолутним величинама одговарају луминозности:

$$L_1 = 10^{0{,}4\left(M_{bol\odot} - M_{bol1}\right)} = 2{,}63 \times 10^3\ L_\odot\ ;$$

$$L_2 = 1{,}77 \times 10^3\ \ L_\odot\ .$$

Формулу за луминозност,

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4\ \ ,$$

као и вредност Сунчеве луминозности и Штефан-Болцманове константе знамо (таблица са константама). Стога, можемо израчунати полупречнике који одговарају луминозностима и температурама L_1и T_1, тј. L_2 и T_2. Њихове вредности су: $R_1 = R_{min} = 57{,}3\ R_\odot$ и $R_2 = R_{max} = 70{,}3\ R_\odot$ (полупречник Сунца - константе). Остаје још да се процени хелиоцентрично растојање цефеиде s. Формула за то, с обзиром на то да је познат модуо растојања, је

$$7{,}53 = 5\log s - 5 + (5 \times 10^{-4})s \ .$$

Овде је растојање изражено у pc што је захтевало да се специфична међузвездана екстинкција прерачуна. Дељење последње једначине са 5 после пребацивања свих познатих на исту страну даје

$$\log s + 0{,}0001s = 2{,}506\,.$$

Груба процена би била да се укаже ред величине. Ако је $s{\sim}10^2$ pc, онда је $2 < \log s < 3$, а $10^{-4}s$ је реда величине 10^{-2} чији збир одговара величини на десној страни једнакој 2,506. Темељитији поступак рачунањем за више полазних вредности растојања датог реда величине доводи до прецизније вредности $s \approx 300$ pc.

ОБРАДА ПОДАТАКА

1. **Мала планета.** Дати подаци – време (t), лонгитуда (λ) и паралакса (p) – односе се на хипотетичну малу планету за коју је познато да јој је нагибни угао равни орбите према равни еклиптике занемарљив. За исте тренутке наведене су и вредности Сунчеве лонгитуде ($\lambda_\odot$). Ексцентричност Земљине орбите је занемарљива.
   1.1. Израчунај положаје мале планете у координатном систему са почетком у Сунцу и нанеси их на график. Оса x на графику је оријентисана ка почетном положају мале планете. Уцртај апсидну линију (на њој леже афел и перихел).
   1.2. Полазећи од радне хипотезе да је хелиоцентрична орбита мале планете елипса, одреди период P, дужину велике полуосе a_p и ексцентричност e.
   1.3. Добијене вредности за период и дужину велике полуосе употреби да одредиш Сунчеву масу.

   У следећој таблици време је изражено у десетим деловима године.

t [год.]	λ [°]	$\lambda_\odot$ [°]	p ["]
2012,3	336,73	40,95	3,82
2012,6	3,44	134,83	7,24
2012,9	50,71	242,08	7,09

2013,4	94,52	64,84	2,40
2013,6	121,40	134,59	2,16
2013,9	154,31	241,82	2,75
2014,2	25,33	353,29	3,16
2014,5	148,51	99,04	1,99
2014,8	176,26	205,45	1,83
2015,0	216,33	280,19	2,03
2015,3	187,5	28,55	2,897

Решење. За сваки тренутак посматрамо троугао ESP чија су темена Земља, Сунце и мала планета, респективно. Угао код темена E (ознака ϕ) добија се из разлике лонгитуда (λ и $\lambda_{\odot}$); дужина дужи ES (ознака a) је позната, једнака је 1 ај. Дужину дужи EP означену са r_g, налазимо из дате паралаксе p. Најбоље је да се то уради помоћу следеће пропорције у којој је r_g изражено у ај

$$r_g = \frac{\pi_{\odot}}{p} \ ,$$

где је $\pi_{\odot}$ паралакса Сунца, или дневна паралакса која одговара геоцентричном растојању од 1 ај (вредност - константе). Са познатим вредностима угла и дужина двеју страница применом косинусне теореме одређује се хелиоцентрично растојање мале планете r (дуж SP), тј.

$$r = \sqrt{a^2 + {r_g}^2 - 2ar_g \cos\phi} \ .$$

Затим се применом синусне теореме одређује угао χ код темена S. Уводи се угао ψ који се мери од осе x и расте у директном смеру (смеру обилажења око Сунца), а позитивни део осе x је полуправа која полази од Сунца и пролази кроз положај мале планете у почетном тренутку $t = 2012{,}3$. Следи: $\psi_P(2012{,}3) = 0$, $\chi = \pm(\psi_P - \psi_E)$, где се индекси P и E односе на малу планету и Земљу, респективно. За угао θ између две полуправе које полазе од Сунца и пролазе кроз два узастопна положаја Земље важи: $\theta = 360\Delta t$, где је Δt временски размак између та два узастопна положаја изражен у годинама. На овај начин се за сваки тренутак могу одредити ψ_E и ψ_P, при чему важи правило (због смерова кретања и мерења лонгитуде): ако је $\psi_P - \psi_E > 0$, онда је $\lambda - \lambda_{\odot} < 0$ и обрнуто.

Приликом цртања графика препоручљиво је да се користе правоугле координате x и y дефинисане на следећи начин

$$x = r\cos\psi_P \ ,$$

$$y = r\sin\psi_P \ ;$$

са скретањем пажње да је за почетни тренутак ($t = 2012{,}3$) $\psi_P = 0$, док се растојање изражава у ај. Резултати су дати доле.

t	x	y
2012,3	2,073	0
2012,6	1,443	1,419
2012,9	$-1{,}104$	1,936
2013,4	$-2{,}752$	0,701
2013,6	$-3{,}106$	$-0{,}033$
2013,9	$-3{,}091$	$-1{,}181$
2014,2	$-0{,}396$	1,967
2014,5	$-2{,}818$	$-2{,}616$
2014,8	$-2{,}344$	$-3{,}196$
2015,0	$-0{,}338$	$-3{,}98$
2015,3	$-1{,}431$	$-3{,}719$

1.1Са овим вредностима се црта график. Уочава се да је вредност паралаксе за t =2014,2 омашка, тако да тачку орбите за тај тренутак не треба узимати у обзир. Оријентација апсидне линије је $\psi \approx 90°$ (перихел). 1.2 Следи да је половина периода око 2,5 година, тј. период је $P \approx 5$ година; према перихелском и афелском растојању, $r_p \approx 2$ ај, $r_a \approx 4$ ај, одређујемо дужину велике полуосе и ексцентричност користећи формуле

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \ ; \ e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad .$$

Добија се: $a \approx 3$ ај , $e \approx 0{,}33$. 1.3 Масу Сунца рачунамо по класичној формули трећег Кеплеровог закона

$$\mathfrak{M}_{\odot} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2} \ .$$

Једина нова ознака је G за константу гравитације. Добија се вредност $\mathfrak{M}_{\odot} = 2{,}1 \times 10^{30}$ kg. Заокругљена на 2 она би се слагала са познатом вредношћу, али на другој децимали имамо неслагање јер је множилац мало мањи од 2,0. Овде треба свакако бити свестан тачности добијених вредности за дужину велике полуосе и период.

2. **Линије водоника.** Дати подаци се односе на хипотетичку звезду за коју су мерене таласне дужине линија водоника. За сваку линију, осим измерене таласне дужине λ_m, дат је назив и припадност серији.

Линија	серија бр.	λ_m [nm]
Лајман-α	$m = 1$	121,526
H-α	$m = 2$	656,239
H-β	$m = 2$	486,110
H-γ	$m = 2$	434,031
Пашен$-\alpha$	$m = 3$	1875,002
Пашен-β	$m = 3$	1281,713

Израчунај радијалну брзину звезде и процени грешку. За све величине, осим λ_m, грешка је занемарљива.
Лабораторијске таласне дужине λ_0 су одређене Ридберговом формулом (промењљивој n_2 у формули – види константе – одговара број серије m).

Решење. Формула за радијалну брзину v_r гласи

$$v_r = c\,\frac{\lambda_m - \lambda_0}{\lambda_0} \ ,$$

где је c брзина светлости (види константе). Користећи Ридбергову формулу можесе израчунати λ_0 за сваку линију; ову формулу дајемо овде у облику

$$\frac{1}{\lambda_0} = R_\infty \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{{n_1}^2}\right) \ .$$

Вредност за m се узима из таблице, а за n_1 према ознаци линије, R_∞ је Ридбергова константа; на пр. за Н-α $n_1 = 3$, јер n_1, очигледно, мора бити веће од m. Добијају се следеће вредности

Линија	λ_0 [nm]	$\Delta\lambda$ [nm]
Лајман-α	121,50	0,026
Н-α	656,11	0,129
Н-β	486,01	0,100
Н-γ	433,94	0,091
Пашен$-\alpha$	1874,61	0,392
Пашен-β	1281,47	0,243

Са $\Delta\lambda$ је означена разлика $\lambda_m - \lambda_0$. Као што се види, она је позитивна (за све линије), што значи да се наша звезда удаљава. Вредности разлике $\Delta\lambda$ су довољно мале што оправдава примену формуле за радијалну брзину дате горе. Примењујући ту формулу израчунаћемо радијалну брзину за сваку линију

Линија	v_r [km s^{-1}]
Лајман-α	64,20
Н-α	58,943
Н-β	61,68
Н-γ	63,10
Пашен$-\alpha$	62 ,73
Пашен-β	56 ,85

Средња вредност је $\langle v_r \rangle = 61{,}2505\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. У циљу одређивања грешке може се користити, на пр. средње апсолутно одступање од средње вредности $\langle |\Delta v_r| \rangle$ или дисперзија, σv_r, дефинисана као

$$\sigma v_r = \sqrt{\frac{(v_r - \langle v_r \rangle)^2}{n}}\ .$$

Овде је n број мерења, $n = 6$. Резултати рачуна су: $\langle|\Delta v_r|\rangle = 1{,}92775\ \mathrm{km\ s^{-1}}$, $\sigma v_r = 2{,}44138\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Заокругљена вредност, што се и захтева, у оба случаја је $2\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. До, практично, истог резултат се долази и применом формуле

$$\Delta v_r = c\,\frac{\Delta\lambda_m}{\lambda_0}\ ,$$

где су $\Delta\lambda_m$и Δv_r апсолутне грешке ових величина. Вредности величине λ_0 се разликују, али узевши неки просек од 700-800 nm и за одговарајућу апсолутну грешку $\sim 10^{-3}$ nm, стижемо до тражене вредности. Дакле коначан резултат гласи

$$v_r = (61 \pm 2)\ \mathrm{km\ s^{-1}}.$$

ПОСМАТРАЊЕ

Планета је имала своју горњу кулминацију почетком априла у вечерњим часовима на висини од $h_{uc} = 52°$. Помоћу карте неба треба одредити следеће.

1. Ректасцензију и деклинацију планете.
2. Месно звездано време за тај тренутак.
3. Сазвежђе у коме се налази ова планета.
4. 1. Тада актуелни сезонски астеризам. 2. Навести која сазвежђа сачињавају тај астеризам. 3. Навести и његове звезде заокруживши и означивши их на карти.

Задатак се односи на Србију, на географску ширину од око 45°. Карта неба је нема, треба означити на њој који њен део одговара ком задатку. Прибор за рад чине: писаљка, лењир и шестар.

Решење. Детаљно решење са картом се може добити на захтев. Небеске екваторске координате су: $\alpha \approx 11^{\mathrm{h}}$, $\delta \approx 6{,}5°$; звездано време $s \approx 11^{\mathrm{h}}$; у сазвежђу Лава, припада астеризму Пролећни троугао кога чине Волар (Bootes), Девица (Virgo) и Лав (Leo); звезде су Арктур (α Bootis), Спика (α Virginis), Денебола (β Leonis) и Регул (α Leonis).