РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2017

ТЕОРИЈА

Кратки задаци

1. У циљу одређивања географске ширине места посматрања иста звезда се посматра два пута у тренуцима две узастопне кулминације. Услови посматрања су да је за обе кулминације азимут исти, $A = 180°$, као и да је најмања висина звезде $h = 30°$. Колика је највећа вредност географске ширине φ_{max} на којој су дати услови задовољени? Напиши израз за географску ширину одређену на овакав начин. Атмосферска рефракција се занемарује.

Решење. Висина у доњој кулминацији треба да буде једнака $30°$. Због азимута од $180°$ обе кулминације треба да се догоде на северној страни, висина не може да буде већа од $90°$, а северни небески пол мора да буде симетрично распоређен у односу на тачке кулминације. Следи да је највећа географска ширина где сви услови могу да буду испуњени једнака $60°$.
До траженог израза долазимо на следећи начин. Висина у доњој кулминацији је $h_{lc} = \varphi - (90 - \delta)$, а у горњој $h_{uc} = \varphi + (90 - \delta)$. Према томе, коначан израз је

$$\varphi = \frac{h_{lc}+h_{uc}}{2} \ .$$

2. Летелица упућена са Земље креће се у равни Венерине орбите око Сунца. На афроцентричном растојању r (растојање од центра Венере) које је занемарљиво у поређењу са Венериним хелиоцентричним растојањем (0,72 ај) брзина летелице у односу на Сунце износи $V' = 30\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. У којим границама треба да буде угао (φ) између вектора ове брзине и вектора Венерине хелиоцентричне брзине ($\overrightarrow{V_v}$) да би на афроцентричном растојању $r = 7200$ km летелица могла да постане Венерин сателит? Сматрај да се Венера око Сунца креће по кружној путањи. Маса ове планете је 0,81 Земљиних маса.

Решење. Услов да тело постане Венерин сателит је да специфична енергија његовог кретања у односу на Венеру буде негативна , тј. на било ком афроцентричном растојању r треба да важи

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{G\mathfrak{M}}{r} < 0\,, \quad (1)$$

где је v афроцентрична брзина летелице, а $\mathfrak{M}$ маса Венере. За одређивање V_v може да послужи трећи Кеплеров закон тако што се најпре одреди период, јер је познат полупречник орбите, а затим следи дељење дужине кружнице и периода, тј.

$$\frac{{a_v}^3}{{P_v}^2} = \frac{{a_\oplus}^3}{{P_\oplus}^2} \quad ;$$

ознаке са индексом *v* односе се на Венеру, а са знаком ⊕ на Земљу,

$$V_v = \frac{2\pi a_v}{P_v} \quad ;$$

добија се $V_v = 35\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Стављањем знака једнакости у изразу (1) уместо $<$ добијамо горњу границу за интензивност брзине $\vec{v}$ ($v_{ul} = \sqrt{2G\mathfrak{M}/r}$), следи $v_{ul} = 9{,}47\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Међутим, с обзиром на

$$\vec{v} = \overrightarrow{V'} - \overrightarrow{V_v} \quad ,$$

применом правила троугла на векторску разлику добија се за интензивност вектора (косинусна теорема)

$$v = \sqrt{V'^2 + {V_v}^2 - 2\,\mathrm{V}' V_v \cos\varphi} \quad . \qquad (2)$$

У једначини (2) непозната је $\cos\varphi$. Његова доња граница се добија када се за v замени v_{ul}. Доњој граници косинуса одговарају $\varphi_1 = 14°15'$ и $\varphi_2 = 345°45'$. Дакле, решење гласи: $0 \leq \varphi < \varphi_1 \wedge \ \ \varphi_2 < \varphi \leq 360°$.

3. Црвени помак једне галаксије је $z = 1$. Њена привидна величина за филтер B је $m_b = 22{,}3$. Одреди одговарајућу апсолутну величину. На основу димензија ове галаксије очекује се да буде 10^{11} пута луминознија од Сунца. Колика би у том случају била њена апсолутна величина? Граница грешке унутар које треба да буде разлика овако добијених апсолутних величина је 0,3. Ако разлика апсолутних

величина ипак прелази ову вредност, шта би могло да буде узрок? Међузвездана екстинкција се занемарује.

Решење. Користећи формуле за радијалну брзину (v_r) и Хаблов закон долази се до закључка да је растојање галаксије $D = 2{,}57$ Gpc, јер је

$$v_r = HD\ ;\ \sqrt{\frac{1 + {v_r}/{c}}{1 - {v_r}/{c}}} = 1 + z\ .$$

Величине означене са c и H су брзина светлости и Хаблова константа, респективно (за v_r се добија 0,6c). Са овим растојањем по познатој формули

$$m_b = M_b + 5\log D\ - 5\ ,$$

добија се $M_b = -19{,}75$. Примена формуле

$$\log\frac{L_g}{L_\odot} = 0{,}4\left(M_\odot - M_g\right)\ ,$$

где је L луминозност, Mапсолутна величина и индекс g се односи на галаксију, а $\odot$ на Сунце, даје за болометријску апсолутну величину галаксије ($M_\odot = 4{,}75$) $M_g = -22{,}75$. Разлика између болометријске звездане величине и оне за филтер B једнака 3 је, очигледно, превелика. Разлог неслагања може да буде веома велика вредност брзине v_r (0,6c), а такође и веома велико растојање (реда величине 10^9pc). Зато се читав спектар зрачења галаксије помера ка црвеном и оно што тада бележе инструменти за дати филтер (у конкретном случају B) не одговара њеном стварном зрачењу. Да би се добио тачнији стварни сјај уводи се поправка позната као K −поправка.

4. Астрономи су са Земље мерили разлику привидних звезданих величина у плавом (B) и видљивом (V) делу спектра – тзв. индекс боје – и добили $m_b - m_v = 0{,}22$. Међутим, овако добијени индекс боје је измењен услед утицаја екстинкције у међузвезданој средини. У плавом делу спектра (B) светлост ослаби $\alpha_b = 2{,}5$ пута, а у делу V $\alpha_v = 2$ пута. Одреди стварни индекс боје звезде (без утицаја екстинкције). Којој спектралној класи може да припада ова звезда и колике би температуре могла да буде?

Решење. Ако слабљење светлости изражено у звезданим величинама означимо са A_b и A_v (за одговарајуће дијапазоне), тада

$$(m_b - m_v)_0 = M_b - M_v = (m_b - A_b) - (m_v - A_v)$$
$$\approx (m_b - 2{,}5 \log \alpha_b) - (m_v - 2{,}5 \log \alpha_v)$$
$$\approx (m_b - m_v) - 2{,}5(\log \alpha_b - \log \alpha_v)\,.$$

Са датим бројним вредностима је $M_b - M_v \approx -0{,}03$. Стварни индекс боје је веома близу нуле. Треба се сетитити Веге као референтне звезде чији је индекс боје баш нула, а она припада спектралној класи А; боја јој је бела, а температура око 10.000 K.

5. Помоћу радио-телескопа меримо радијалну брзину региона H II. Добијена је вредност $v_r = 90\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Мерење радијалне брзине се у радио-астрономским посматрањима обавља тако да је испуњен следећи услов: пројекција брзине $\vec{V}$ региона H II у односу на средиште Млечног пута (МП) на правац од Сунца ка региону има највећу могућу апсолутну вредност. И регион и Сунце се крећу око средишта МП по кружницама у истој равни (равни МП) у смеру казаљке на часовнику. Правци од Сунца ка региону и ка средишту МП се разликују за $30°$. Брзина Сунчевог кретања око средишта МП износи $V_\odot = 220\ \mathrm{km\ s^{-1}}$, а полупречник путање $R_\odot = 8{,}5$ kpc.
а) Колика је галактичка лонгитуда l региона?
б) Колика је угаона брзина ω региона око средишта МП (у $\mathrm{km\ s^{-1}\ kpc^{-1}}$)?

Решење. а) Брзина кружног кретања у МП V зависи од растојања до средишта МП R. Количник V/R је угаона брзина ω. Зато је за било који објект који се креће око средишта МП по кружници важно знати растојање од центра МП, тј. полупречник кружнице. По дефиницији, радијална брзина је пројекција векторске разлике брзине региона у односу на средиште МП и брзине Сунца у односу на средиште МП (поправка за Сунчево кретање)

$$v_r = V\cos\theta - V_\odot \cos(90 - l) = V\sin\varphi - V_\odot \sin l\ , \qquad (1)$$

јер је $180 - \varphi + \theta = 90$ (троугао чија су темена: S - Сунце, GC - средиште МП и H II, а углови: l код S, φ код H II, при чему се имају у виду правац и смер кретања око средишта МП). Следи

$$V\sin\varphi = V_\odot \sin l + v_r\ .$$

С друге стране, према синусној теореми, с обзиром на дужине страница у троуглу S GC H II, је

$$R = R_\odot \frac{\sin l}{\sin\varphi}\ . \quad (2)$$

Знајући дефиницију угаоне брзине можемо написати

$$\omega = \frac{\frac{V_\odot \sin l + v_r}{\sin\varphi}}{\frac{R_\odot \sin l}{\sin\varphi}} = \frac{V_\odot \sin l + v_r}{R_\odot \sin l} \ . \quad (3)$$

Због важности познавања растојања R је и дато да је апсолутна вредност пројекције брзине региона на хелиоцентрични правац максимална, а то ће се догодити ако је $\sin\varphi = \pm 1$ (формула (1)), тј. ако је угао код региона прав. Тада је (формула (2)) $R = 4{,}25$ kpc. Пошто је, по дефиницији, за средиште МП $l = 0$, лонгитуда региона може бити или $30°$ или $330°$. Када би била једнака $330°$, радијална брзина би била негативна, а то није у складу са задатком. Следи да је одговор $l = 30°$.
б) Из формуле (3) следи $\omega = 47{,}1\ \mathrm{km\ s^{-1}\ kpc^{-1}}$.

Дуги задаци

1. Планета у двојном систему
   Дата је двојна звезда. Однос маса компонената је 1:3. Око масивније, чија је маса једнака Сунчевој, по стабилној путањи кружног облика обилази планета. Раван ове кружнице и раван елипсе двојне звезде се поклапају. Привидна величина мање масивне звезде посматрана са планете у три тренутка, на растојањима s_1, s_2, s_3, када је мање масивна звезда у опозицији са масивнијом, износи: $m_1 = -13{,}75$, $m_2 = -12{,}61$ и $m_3 = -11{,}87$, при чему су m_1 и m_3 најмања и највећа вредност привидне величине мање масивне звезде за опозицију (привидна величина мање масивне звезде у опозицији никада не може бити изван интервала $[m_1, m_3]$). Између тренутака када је привидна величина мање масивне звезде једнака m_1 и m_2 не може да протекне мање од 41 године. Одреди дужину велике полуосе елипсе по којој мање масивна звезда обилази и период обиласка планете око матичне звезде. Стабилност орбите планете је условљена чињеницом да је полупречник те орбите (r_0) 27 пута мањи од периастронског растојања између две звезде (r_p) због чега су поремећаји које уноси мање масивна звезда у кретање планете занемарљиви.

Решење. За сваки од три тренутка важи

$$m_i = M + 5\log s_i - 5\,, [i = 1{,}2{,}3]\,,$$

где је M апсолутна величина мање масивне звезде. За сваку од три комбинације (1 и 2, 2 и 3, 1 и 3) важи

$$0{,}2(m_j - m_i) = \log\frac{s_j}{s_i} \ , \quad (1)$$

где индекси i и j одговарају било којој од три комбинације. Пошто је у питању опозиција, онда ће за растојање између звезда (r_i) важити

$$r_i = r_0 + s_i, \ [i = 1{,}2{,}3] \, . \ (2)$$

Како растојања s_1 и s_3 одговарају екстремним вредностима привидне величине за опозицију, онда ће њима одговарајућа растојања r_1 и r_3 (израз (2)) бити периастронско r_p и апоастронско растојање r_a, респективно. Из услова задатка $r_p = 27r_0$ и једначине (2) следи $s_1 = 26r_0$, а из односа s_3/s_1 (једначина (1)) следи $r_a = 62{,}8r_0$. Дакле, $r_a/r_p = 2{,}33$. С обзиром на дефиницију $r_a/r_p = (1+e)/(1-e)$ за ексцентричност орбите двојне звезде важи $e = 0{,}4$. Помоћу формуле (1) можемо наћи односе s_2/s_1 и s_3/s_2, а како је познато $s_1 = 26r_0$, с обзиром на формуле (2), следи $r_3 = 1{,}4r_2$ и $r_1 = 0{,}6r_2$, тј. r_2 је дужина велике полуосе елипсе. Добија се $r_2 = 45r_0$. Дато најмање време (41 година) је време потребно мање масивној звезди да се помери из периастрона до положаја на коме је $r = a$. Због другог Кеплеровог закона на снази је пропорција

$$\frac{\Delta t}{P} = \frac{S_g}{S} \ . \ (3)$$

Овде је Δt дати временски размак (41 година), P период обиласка двојне звезде, S површина унутар елипсе ($\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$), док је S_g површина дела унутар елипсе оивиченог дужима FB и FP и луком елипсе PB; тачка F је жижа елипсе у којој се налази масивнија звезда, тачка P је периастрон, а тачка B је положај где је растојање између две звезде једнако a. Површина S_g је једнака четвртини површине елипсе умањеној за површину правоуглог троугла FCB, где је C средиште елипсе, која је једнака $ea^2\sqrt{1-e^2}/2$. Тако израз (3) постаје

$$\frac{\Delta t}{P} = \frac{1}{2}\frac{\frac{\pi}{2} - e}{\pi} \ .$$

Пошто су све остале величине познате, налазимо $P \approx 220$ година. Онда трећи Кеплеров закон (укупна маса $\mathfrak{M}$ дата, $\mathfrak{M} = 1{,}33\ \mathfrak{M}_\odot$), примењен у облику

$$\frac{a^3}{P^2} = \mathfrak{M} \, ,$$

даје $a \approx 40$ ај. Пошто се зна колико пута је a веће од r_0 (45), следи $r_0 = 0{,}89$ ај. Поновна примена трећег Кеплеровог закона у истом облику (сада је маса једнака $\mathfrak{M}_\odot$) за период обиласка планете даје 0,84 године.

2. Венерин прелаз преко Сунчевог диска

Сателит Probe-2 je пратио Венерин прелаз преко Сунчевог диска. Венерин траг на скици испод није права линија због чињенице да је Probe-2 на путањи око Земље. Скица представља прелаз Венере виђен са сателита. Тачке од 1 до 5 одговарају тренуцима по времену UT: $t_1 = 23^{\mathrm{h}}29^{\mathrm{m}}$, $t_2 = 0^{\mathrm{h}}37^{\mathrm{m}}$, $t_3 = 1^{\mathrm{h}}25^{\mathrm{m}}$, $t_4 = 2^{\mathrm{h}}10^{\mathrm{m}}$ и $t_5 = 3^{\mathrm{h}}7^{\mathrm{m}}$. На скици је још дато, пречник Сунчевог лика $D' = 80$ mm, корак $A' = 3$ mm.

а) Одреди на којој висини изнад Земље сателит кружи.

б) Колико пута током једног дана обиђе око Земље?

в) Колики пут пређе Венера током једног обиласка сателита око Земље?

Сателит је правио фотографије приликом преласка изнад Земљиних полова. Венерина година траје 224,7 дана. Величина Венере на скици није сразмерна величини Сунца. Подаци битни за рачун су написани на скици. Ексцентричности орбита, Венере и Земље око Сунца и сателита око Земље, занемари. Исто важи и за нагиб Венерине орбите у односу на еклиптику и спљоштеност Земље.

Решење.

а) Растојање између Венере и Земље d_{zv} дато је изразом

$$d_{zv} = d_{sz} - d_{sv} \quad .$$

Индекси одговарају почетним словима за Сунце, Земљу и Венеру. Растојање између Сунца и Венере је практично познато јер се можемо позвати на трећи Кеплеров закон

$$\frac{{d_{sz}}^3}{{P_z}^2} = \frac{{d_{sv}}^3}{{P_v}^2} \quad ,$$

где су величине означене са P одговарајући периоди; следи $d_{zv} = 41{,}4 \times 10^9$ m. Угаони пречник Сунца виђен са Земље је

$$\alpha_s = 2\mathrm{arctg}\frac{R_s}{d_{sz}} .$$

Вредности су познате $\alpha_s = 0{,}536°$. Да бисмо израчунали на којој висини сателит кружи око Земље искористићемо чињеницу да је снимао приликом својих пролазака изнад Земљиних полова. Угао сателита α_{Probe} је

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha_{Probe}}{2} = \frac{r_{Probe}}{d_{zv}} = \frac{r_z + h}{d_{zv}} \ .$$

Подаци са скице за A' и D' нам омогућују да нађемо α_{Probe} као

$$\alpha_{Probe} = \alpha_s \frac{A'}{D'} \quad .$$

Следи $\alpha_{Probe} = 0{,}0201°$, $h \approx 900$ km. Осим тога висина може да се одреди и помоћу трећег Кеплеровог закона

$$\frac{{r_{Probe}}^3}{{P_{Probe}}^2} = \frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{4\pi^2} \ ,$$

али тада треба најпре одредити период. Њега налазимо из релације

$$P_{Probe} = \frac{\Delta t_{1-5}}{2} = \frac{t_5 - t_1}{2} \ ,$$

која даје $P_{Probe} = 1^{\mathrm{h}}49^{\mathrm{m}}$, $h \approx 1100$ km. Разлика од око 200 km се објашњава грешком мерења величине A', а и тиме што мерења нису обављена када се сателит налазио тачно изнад Земљиних полова. Осим тога P_{Probe} може да се одреди и упросечавањем размака између појединачних мерења, тј.

$$P_{Probe} = \frac{2(\Delta t_{1-2} + \Delta t_{2-3} + \Delta t_{3-4} + \Delta t_{4-5})}{4} \quad .$$

Добија се поново $1^{\mathrm{h}}49^{\mathrm{m}}$.

б) Сателит око Земље током једног дана обиђе 13 пута јер је $N = 24/1{,}785 = 13{,}4 \approx 13$.
в) Најпре треба одредити брзину Венере на њеној орбити око Сунца. Сви подаци су познати, а формула је

$$v_v = \frac{2\pi d_{sv}}{P_v} \ ,$$

па је резултат $v_v \approx 35\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Венерин пут s_v ћемо добити множењем ове брзине и периода сателита, $s_v \approx 2{,}25 \times 10^5$ km.

ОБРАДА ПОДАТАКА

1. **Јесмо ли нашли другу Земљу**[1] Екстрасоларна планета Кеплер-5b била је једна од првих откривених помоћу космичког телескопа „Кеплер“. Графици приказани на Сл. 1 и 2 односе се на криву сјаја за планету током преласка преко матичне звезде, док су на Сл. 3 дата каснија мерења радијалне брзине звезде обављена на Земљи. Планета обилази по кружници, а ефективна температура матичне звезде је $T_{hs} = 6300$ K, полупречник $R_{hs} = 1{,}79\ R_{\odot}$ и маса $\mathfrak{M}_{hs} = 1{,}37\ \mathfrak{M}_{\odot}$. Нагиб равни орбите је $i = 86{,}3°$ (према тангенцијалној равни, која је нормална на визуру). Остали подаци потребни за решавање задатка добијају се са три дата графика, а сви коришћени подаци се морају навести у решењу.
   а) Колико је планета удаљена од матичне звезде? У овом кораку се занемарује маса планете.
   б) Израчунај полупречник R_p и масу планете $\mathfrak{M}_p$. Упореди их са одговарајућим вредностима за Јупитер ($R_j = 7 \times 10^7$ m, $\mathfrak{M}_j = 1{,}9 \times 10^{27}$ kg).
   в) Уз претпоставку да је албедо планете једнак нули израчунај њену температуру.
   г) Да ли је планета стеновитог типа?

   Сл. 1. Крива сјаја звезде, апсциса – време (дани), ордината релативни сјај, на којој се запажају прекиди (празнине) на траци која показује релативни сјај једнак 1. Сл. 2. Детаљнији приказ криве сјаја док планета Кеплер-5b пролази испред матичне звезде; апсциса – фаза прелаза (у часовима), ордината – релативни сјај. Фаза 0 одговара средини пролаза. Сл. 3. Радијална брзина матичне звезде планете Кеплер-5b; апсциса – фаза орбите, ордината – радијална брзина (m s^{-1}).

   Израчунај грешку периода, а за остале величине може и груба процена грешке

Решење. а) Најпре се одређује период обиласка P. Празнине са Сл. 1. се наводе по броју (z у Таблици 1), а свакој одговара време са апсцисе.

Таблица 1

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t	55,9	59,4	63,0	66,6	70,0	73,7	77,2	80,7	84,3	87,8	91,4	95,0

[1] Задатак је преузет из часописа „Болид“, број 149(4/2016), стр. 17, издавач: Звјездарница Загреб, Загреб.

Δt	0	3,5	3,6	3,6	3,4	3,7	3,5	3,5	3,6	3,5	3,6	3,6

Временски размак између две узастопне празнине одговара траженом периоду обиласка. Он је уписан у врсти Δt где његова вредност одговара вредности из друге врсте испод $z \in N$ (N скуп природних бројева). Период се одређује као средња вредност,

$$P = \frac{\sum_1^{11} \Delta t_i}{11} \; .$$

Добијена вредност је $P = 3{,}5545$ дана. Апсолутну грешку периода ΔP можемо израчунати, на пр., помоћу стандардне девијације σ, потом подељене $\sqrt{11}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_1^{11} (\Delta t_i - P)_i^{\,2}}{10}} \; .$$

Следи $\Delta P = 0{,}0247$ дана, а с обзиром на то да се рачуна грешка, заокруглићемо је навише, тј. $P = (3{,}55 \pm 0{,}03)$ дана. Пошто се планета креће по кружници, њено растојање од матичне звезде је увек исто, једнако полупречнику орбите, r. Њега одређујемо користећи трећи Кеплеров закон, где је G константа гравитације,

$$r = \left(\frac{G}{4\pi^2} \mathfrak{M}_{hs} P^2\right)^{1/3} \; .$$

Апсолутну грешку одређивања налазимо из одговарајуће релативне грешке δr. Она зависи од релативних грешака масе и периода (грешке универзалних констаната једнаке нули), тј. $3\delta r = 2\delta P + \delta \mathfrak{M}_{hs}$. Пошто је маса дата са две децимале, њена апсолутна грешка ће бити 0,01 $\mathfrak{M}_{\odot}$. Сада су све величине познате, па је, према томе, $r = (7{,}6 \pm 0{,}1) \times 10^9$ m (апсолутна грешка заокругљена навише).

б) У овом делу задатка се узима у обзир маса планете, тј. не занемарује се кретање звезде око центра маса. Полупречник апсолутне орбите (кружног облика) матичне звезде се означава са r_0 , а одговарајућа брзина са v_0, и примењује се позната формула

$$\mathfrak{M}_{hs} r_0 = \mathfrak{M}_p r \implies \mathfrak{M}_p r = \frac{\mathfrak{M}_{hs} P v_0}{2\pi} \; ;$$

с обзиром на то да је

$$v_0 = \frac{2\pi}{P} r_0 \, .$$

Због кретања по орбити радијална брзина има променљиви део дат изразом (вид. Републичко такм. у Србији 2018)

$$\delta v_{rad} = \sin i \,[\sin\omega\,(v_r\cos\nu - v_t\sin\nu) - \cos\omega\,(v_r\sin\nu + v_t\cos\nu)]\,.$$

Услед кретања по кружници је: $\omega = 0$ (угао оријентације апсидне линије), $v_r = 0$ (компонента брзине услед промене растојања). Зато ће за матичну звезду амплитуда промењивог дела радијалне брзине бити једнака

$$|\delta v_{rad}|_{max} = v_0 \sin i\ .$$

Према графику са Сл. 3 је $|\delta v_{rad}|_{max} = 222\ \mathrm{m\ s^{-1}}$; следи $v_0 = 222{,}464\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, а онда масу планете рачунамо као

$$\mathfrak{M}_p = \frac{\mathfrak{M}_{hs} P v_0}{2\pi r}\ .$$

Вредност је $\mathfrak{M}_p = 3{,}89566 \times 10^{27}kg= 2{,}050349\ \mathfrak{M}_j$; процена апсолутне грешке преко релативних доводи до $\mathfrak{M}_p = (2{,}05 \pm 0{,}05)\mathfrak{M}_j$. На Сл. 2 имамо податке о прелазу планете преко диска звезде. Пут који пређе планета, од тренутка првог додира њихових кружних ликова до тренутка престанка додиривања, једнак је $2l$, због симетрије у односу на средиште лика звезде. Међутим, планета се налази на, нама већ познатом, растојању од звезде r. То значи да ће на средини пута за хелиоцентричног посматрача средиште лика планете бити на растојању b од средишта лика звезде, при чему важи

$$b = r\cos i\,.$$

Дужи b и l заклапају прав угао, а њихове крајње тачке су на растојању једнаком збиру полупречника звезде и планете, $R_{hs} + R_p$. Са Сл. 2 налазимо пад сјаја звезде чије је трајање $\tau = 4{,}6$ часова (трајање прелаза). Угао α који одговара овом временском размаку налазимо као

$$\alpha = 360°\frac{4{,}6}{3{,}55 \cdot 24}\ .$$

Пут l као половина је онда једнак

$$l = r\sin\frac{\alpha}{2}\ .$$

Јасно је да је

$$R_{hs} + R_p = \sqrt{b^2 + l^2}\ .$$

Све потребне величине су познате. Тако се долази до резултата $R_p = 1{,}823\ R_j$. Због несигурности у процењивању величине τ са графика апсолутна грешка може бити знатна. Нека груба процена била би око 0,2 R_j , следи $R_p = (2{,}0 \pm 0{,}2)R_j$.

в) Луминозност звезде L_{hs}, $L_{hs} = 4\pi\sigma {R_{hs}}^2 {T_{hs}}^4$, је $L_{hs} = 1{,}742 \times 10^{27}$ W. На јединицу површине планете пада њен $(4\pi r^2)^{-1}$ део, који се множи површином диска планете ($\pi {R_p}^2$). Пошто је албедо једнак нули, овај производ је „луминозност планете“. За њену температуру онда следи

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{L_{hs}}{16\pi\sigma r^2}}\ .$$

Са проценом грешке то је $T_p = (18 \pm 1) \times 10^2$K.

г) Када би планета била стеновита, онда би њена средња густина била упоредива са средњом густином Земље. Упоредићемо их. Средња густина је пропорционална маси, а обрнуто пропорционална кубу полупречника. Маса ове планете нам је позната, а масу Земље налазимо у константама. Закључујемо да је наша планета око 650 пута масивнија од Земље, али је њена запремина око 10,580 пута већа од Земљине (полупречник Земље је такође међу константама). Јасно је, и без даљег рачуна, да је њена средња густина знатно мања од Земљине. Закључујемо да ова планета не може да буде стеновита.

2. **Звездани пар.** Списак података дат ниже садржи координате X и Y мање сјајне компоненте једног звезданог пара[2]. Подаци садрже мерења, као и интерполисане и екстраполисане вредности. Сјајнија компонента се налази у координатном почетку. За сваки пар координата приложена је одговарајућа епоха (тренутак посматрања). За овај звездани пар тангенцијална раван (нормална на визуру) XOY и раван путање се поклапају. Положаје мање сјајне звезде дате у таблици прикажи графички. Користећи график установи да ли је пар везан (да ли је то права двојна звезда) и, ако је заиста тако, одреди правац апсидне линије. Апсидна линија се дефинише као оса x у новом координатном систему xOy у коме је оса x усмерена ка периастрону. Правац апсидне линије је онда угао ω између полуправих OX и Ox ($X > 0$, $x > 0$) рачунат у директном смеру од OX. Такође са графика одреди и привидну дужину велике полуосе α и ексцентричност орбите e. За нађену елипсу користећи временске податке процени период P (у годинама). За познато хелиоцентрично растојање $s = 170$ pc одреди стварну дужину велике полуосе a (у астрономским јединицама) и масе обеју звезда $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ у Сунчевим масама ($\mathfrak{M}_1 = 2\mathfrak{M}_2$). Координате су дате у лучним секундама.

[2] Подаци су преузети из каталога Washington Double Stars – односе се на пар 07417.

Таблица 1. Мање сјајна звезда пара

Епоха	X	Y
1900,0	$-0,294$	0,463
1917,0	$-0,201$	0,447
1928,0	$-0,080$	0,346
1932,0	$-0,076$	0,364
1938,0	$-0,077$	0,304
1945,0	0,050	0,259
1950,0	0,067	0,115
1953,0	0,107	0,069
1955,0	0,089	$-0,003$
1956,0	0,065	$-0,029$
1957,0	0,043	$-0,055$
1958,0	0,009	$-0,065$
1960,0	$-0,053$	$-0,100$
1961,0	$-0,082$	$-0,100$
1968,0	$-0,205$	$-0,043$
1972,0	$-0,249$	$-0,006$
1977,0	$-0,319$	0,043
1987,0	$-0,411$	0,120
2010,0	$-0,456$	0,281
2053,0	$-0,393$	0,446

Решење. Пар је везан гравитацијом. Коректан график са уцртаном апсидном линијом. Оријентација апсидне линије $\omega \approx 315°$, $\alpha \approx 0{,}33''$, $e \approx 0{,}8$, $P \approx 170$ година. Следи $a = \alpha s = 0{,}33 \cdot 170 \approx 56$ астрономских јединица. Онда је укупна маса (по III Кеплеровом закону) - $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = a^3/P^2 = 56^3/170^2 \approx 6\,\mathfrak{M}_{\odot}$, а појединачне масе су: $\mathfrak{M}_1 = 4\mathfrak{M}_{\odot}$ и $\mathfrak{M}_2 = 2\,\mathfrak{M}_{\odot}$.

ПОСМАТРАЊЕ

1. Повежи све сезонске астеризме.
2. Напиши имена звезда које граде темена полигона сезонских астеризама, по моделу: назив сезонског астеризма, затим алфабетски префикс дате звезде и њено име (било латински, било српски). И тако за сваки.
3. Заокружи следеће звзде и уз сваку додај одговарајући број: Мизар – 1, Мира -2 , Бетелгез – 3, Тубан – 4, Чарлсово срце или Cor Caroli – 5, Алкаид – 6, Хамал – 7, Фомалхаут – 8, Алгол – 9, Садр/Шадр – 10, Албиреo -11.
4. Пронађи на карти неба објекте Месијеовог каталога и поред њих означи број који им припада у том каталогу, као и сазвежђе коме припадају.
5. Звезда Антареј (Antares) је кулминовала пре 1 час од текућег тренутка T. а) Нацртај део небеског меридијана који се у овом тренутку (T) налази изнад хоризонта (за наше географске ширине, око 45°). б) Уцртај и место зенита за дати тренутак и означи карактеристичне тачке на видљивом делу небеског меридијана. в) Која се позната и сјајна звезда у тренутку T налази близу своје доње кулминације?

Решење. 1. Повезивање астеризама.
2. Јесењи четвороугао: алфа Андромеде – Алферат, Алферац, алфа Пегаза – Маркаб, бета Пегаза – Шеат, гама Пегаза – Алгениб. Летњи троугао: алфа Лабуда – Денеб, алфа Лире – Вега, алфа Орла – Алтаир. Зимски шестоугао: бета Ориона – Ригел, алфа Великог пса – Сирије (Сиријус), алфа Малог пса – Прокион (Процион), бета Близанаца - Полидеук (Полукс), алфа Возара (Кочијаша) – Капела, алфа Бика – Алдебаран. Пролећни троугао: алфа Волара – Арктур (Арктурус), алфа Девојке (Девице) – Спика, алфа Лава – Регулус или бета Лава – Денебола.
3. 1. зета - Велики медвед, 2. омикрон- Кет, 3. алфа – Орион, 4. алфа – Змај, 5. алфа –

Ловачки пси, 6. ета – Велики медвед, 7. алфа - Ован, 8. алфа – Јужна риба, 9. бета – Персеј, 10. гама – Лабуд, 11. бета -Лабуд.

4. Орион – М 42, Бик - М 45, Троугао – М 33, Андромеда - М 31 и М 32, Касиопеја - М 103, Лира - М 57, Херкул - М 92, Херкул - М 13.

5. Имајући у виду да је ова звезда имала горњу кулминацију пре један час, сада је у опадању, на западној страни неба. Самим тим, небески меридијан је остао источно од ње. У тренутку кулминације звездано време је било једнако њеној ректасцензији, приближно $16^{\mathrm{h}}30^{\mathrm{m}}$, сада је нарасло на $17^{\mathrm{h}}30^{\mathrm{m}}$. На сферној пројекцији овај круг се пресликава у линију и, осим што пролази кроз јужну тачку за коју смо израчунали одговарајућу ректасцензију, пролази и кроз видљиви небески пол на средини карте, близу Северњаче. Видљиви део небеског меридијана је одређен крајњим тачкама олеате, тј. тачкама које би одговарале северу и југу на хоризонту. Поларна даљина северне тачке хоризонта (N) једнака је географској ширини места. Понуђена вредност географске ширине, која одговара нашим крајевима, олакшава проналажење деклинације ове тачке, утолико пре што су оне једнаке, $d = \delta = 45°$, тј. северни небески пол се налази на пола пута између зенита и тачке N (једног краја небеског меридијана). Имајући ово у виду, понуђена скала деклинације нам може помоћи да нађемо деклинацију од 45° и уцртамо дневни паралел који сече наш небески меридијан у тачкама - зенит и N. (Узгред, овај дневни паралел је уједно и циркумполарна кружница за дато место јер додирује хоризонт у једној тачки, а то је N коју смо помоћу њега одредили). Такође, с обзиром на размеру карте – сеже до $\delta = -45°$ - може се лако реконструисати и јужна тачка хоризонта (S); налази се у пресеку небеског меријана и ободне кружнице карте. Уосталом, то је била и полазна тачка у почетном дефинисању положаја небеског меридијана. Карактеристичне тачке на небеском меридијану су: северни небески пол, северна и јужна тачка (N и S, на крајевима видљивог лука), пројекција југа на небески екватор (E_S) и зенит. Зенит смо раније реконструисали помоћу дневног паралела $\delta = 45°$, а он свакако мора бити на средини видљивог дела небеског меридијана. С обзиром на то да очекујемо да доња кулминација буде видљива звезда коју тражимо се налзи над северном страном света, близу небеског меридијана. Уколико је све урађено на исправан начин, требало би да је лако уочити Капелу, алфу Возара, над самом северном страном небеског меридијана.