РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2016

ТЕОРИЈА

**Кратки задаци**

1. Колико траје излазак Сунца на северном полу? А Месеца?

**Решење.** Пре свега, треба да знамо у које доба године Сунце излази на северном полу – око пролећне равнодневице!

Средња угаона брзина кретања Сунца по еклиптици дата је релацијом

$$\omega_{\circledast} = \frac{360}{\mathrm{T}_{\odot}},$$

где је $T_{\odot}$ трајање тропске године у данима ($T_{\odot} \approx 365{,}25$). Тако добијамо $\omega = 0{,}986°$ по дану. Око пролећне равнодневице вертикална компонента угаоне брзине Сунца $\omega_v$ ће бити

$$\omega_{v\odot} = \omega_{\circledast} \sin\varepsilon\,,$$

тј. $\omega_{v\odot} = 0{,}393°$ по дану ($\varepsilon$ је нагиб есклиптике према екватору). Знајући да је угаони пречник Сунца на дан пролећне равнодневице једнак 32’(0,53°) налазимо да излазак Сунца на северном полу траје 1,35 дана или 1 дан 8 часова и 22 минута.

Месец ће излазити знатно брже (зашто?). Слично, средња угаона брзина Месеца ће бити

$$\omega_M = \frac{360}{\mathrm{T}_M}\ .$$

Пошто је $\mathrm{T}_M$ познато (константе), налазимо $\omega_M = 13{,}177°$ по дану. Занемарујући нагиб Месечеве орбите према еклиптици пишемо

$$\omega_{vM} = \omega_M \sin\varepsilon\ ,$$

па је $\omega_{vM} = 5{,}254°$ по дану. Ако угаони пречник Месеца износи 31’, његов излазак ће трајати 2,36 часова, што по „поларним мерилима“ није много.

2. У Великом Магелановом облаку је 1987. године експлодирала супернова (SN1987A). Хабловим телескопом је откривено да је остатак супернове (највероватније неутронска звезда) окружен прстеном који се види као елипса чија је велика полуоса $\rho = 0{,}83''$. Око 90 дана после експлозије у спектру супернове су почеле да се појављују емисионе линије веома јонизованих атома. Њихов интензитет достигао је максимум 400 дана после експлозије да би затим почео да опада. (а) Објасни кашњење у појави ових емисионих линија и одреди удаљеност до супернове SN1987A. (б) Може ли ова супернова да се користи као „стандардна свећа" (привидна звездана величина у максимуму сјаја била је $m = 2{,}9$)? Зашто? Екстинкцију занемари.

**Решење.** Задатак је инспирисан чланцима који се могу наћи на следећим адресама:
http://adsabs.harvard.edu/abs/1998MnSAI..69..225P,
http://adsabs.harvard.edu/abs/1991ApJ...380L..23P.
а) Најједноставније објашњење кашњења појаве емисионих линија је да је светлост поново емитована од стране материје на неком растојању од супернове и да та материја одговара кружном прстену који због нагиба $i$ видимо у облику елипсе. Светлост емитована са супернове долази до нама најближе тачке A (на елипси у чијем је средишту остатак супернове, тачка R) одакле се поново емитује ка Земљи. Стога оба дата времена – $t_1$ =90 и $t_2$ =400 (у даннима) – задовољавају следеће релације: $t_1 = (r/c)(1 - \sin i)$, $t_2 = (r/c)(1 + \sin i)$, где је $r$ полупречник прстена. Ово је систем од две једначине са две непознате чије решење гласи: $r = 0{,}21$pc, $i = 39°$. Сада се лако, из једначине $\rho = r/s$, одређује удаљеност $s$ до супернове, $s = 52{,}2$ kpc.
б) Треба израчунати апсолутну величину у максимуму сјаја, а за то служе привидна величина и удаљеност, имајући у виду да се екстинкција занемарује, тј.

$$M = m - 5\log s + 5 \,.$$

Резултат је $M = -15{,}7$, штоје веће од $-19$, апсолутне величине у максимуму сјаја за супернове типа Ia које се користе као „стандардне свеће". Дакле, одговор је НЕ. Осим тога, супернова SN1987A је настала као последица гравитационог колапса масивне звезде, а супернове типа Ia настају у тесним двојним ситемима.

3. Посматране су две звезде. Однос њиховог стварног сјаја у плавом филтру (B) је 12,02. У визуелном делу спектра њихове привидне величине су једнаке, док је за филтер B разлика (апсолутна вредност) привидних величина једнака 0,4. Одреди однос њихових хелиоцентричних растојања $s_1$ и $s_2$ (индекс 1 се односи на сјајнију звезду). Међузвездану екстинкцију занемари.

**Решење.** Релација која повезује привидну и апсолутну величину звезде за исти филтер $i$ гласи

$$m_i = M_i + \mathrm{dm}(i) \, ,$$

где је $\mathrm{dm}(i)$ модуо растојања, која за нулту екстинкцију не зависи од филтра и једнак је

$$\mathrm{dm} = 5 \log s - 5 \, .$$

Ако су привидне величине за два објекта једнаке, онда из прве релације следи да је разлика апсолутних величина једнака разлици модула растојања, тј.

$$M_{v2} - M_{v1} = 5 \log \frac{s_1}{s_2} \, .$$

Пошто модуо растојања не зависи од таласне дужине, разлика привидних величина за филтер B потиче од промене апсолутних величина у односу на филтер V. Свака од њих може бити већа од оне друге, зависно од класа луминозности. Ако на Херцшпрунг-Раселовом дијаграму посматрамо положаје двеју звезда главног низа, сјајнија звезда ће бити још сјајнија за филтер B него за филтер V јер дуж главног низа луминозност расте са ефективном температуром. Међутим, ако се пореде звезда главног низа и џин, важи обрнуто – разлика апсолутних величина је већа за V него за B. Разлика апсолутних величина се рачуна по познатој формули

$$\log \frac{I_{b1}}{I_{b2}} = 0{,}4(M_{b2} - M_{b1}) \, .$$

Однос сјаја чији се логаритам узима на левој страни је дат (12,02). За разлику апсолутних величина следи да је једнака 2,7. Решења за $M_{v2} - M_{v1}$ су онда 2,3 за две звезде главног низа и 3,1 (звзеда главног низа и џин). У првом случају је сјајнија звезда (бр. 1) даља од Сунца 2,88 пута него мање сјајна, а у другом 4,17 пута.

4. Галактичке координате Малог Магелановог облака су: лонгитуда $l = 302°46'$ , латитуда $b = -44°16'$. Његово хелиоцентрично растојање, које сада износи $s = 62$ kpc, повећава се сваке секунде за 146 km. Под претпоставком да се Мали Магеланов облак креће праволинијски путањом која пролази кроз средиште Млечног пута, одреди његову тренутну брзину у односу на средиште Млечног пута. Сматрај да се Сунце око средишта Млечног пута креће по кружној путањи полупречника 8,5 kpc брзином од 220 km $\mathrm{s}^{-1}$ у смеру казаљке на часовнику гледано са северног галактичког пола. Разлику између равни галактичког екватора и равни Млечног пута занемари.

**Решење.** Ако се Мали Магеланов облак (ММО) креће праволинијски кроз средиште Млечног пута (МП), онда се његово кретање у односу на средиште МП своди на промену растојања од тог средиштатј. Правац кретања је увек дуж праве која пролази кроз средиште МП и ММО. Најпре треба нацртати троугао OSM са теменима у средишту МП (O), Сунцу (S) и ММО (M). У овом троуглу страница OS је много мања од осталих од осталих, па је зато угао код темена M веома мали и за његов косинус се може узети да је једнак 1. С друге стране, брзина кретања ММО у односу на Сунце је разлика његовог кретања у односу на МП и Сунца у односу на исти чија се брзина пројектује на праву линију која спаја Сунце и ММО. Правац и смер Сунчевог кретања у односу на МП, као што је горе дато, је $l = 90°$, $b = 0°$. Када би за ММО важило $b = 0°$, пројекција Сунчеве брзине на праву која пролази кроз Сунце и ММО била би одређена производом косинуса разлике лонгитуда и Сунчеве брзине, тј. $220\cos(302°46' - 90°) = -185\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Међутим, како је за ММО $b \neq 0$, ову вредност треба још помножити чиниоцем $\cos(-44°16')$, па се тако долази до вредности од $-132{,}5\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Значи, када би ММО мировао у односу на средиште МП, он би се од хелиоцентричног посматрача удаљавао брзином од $132{,}5\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Тражена брзина кретања ММО у односу на средиште МП $v$ је онда дата као

$$v_{rad} = v - v_{\odot}.$$

С обзиром на $v_{rad} = 146\ \mathrm{km\ s^{-1}}$ и $v_{\odot} = -132{,}5\ \mathrm{km\ s^{-1}}$ биће $v = 13{,}5\ \mathrm{km\ s^{-1}}$.

5. Свемирски брод се креће око неке планете по кружној путањи полупречника $R_0 = 10.000$ km брзином од $V_0 = 12\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. У неком тренутку интензивност брзине брода се повећа за $\Delta V = 3\ \mathrm{km\ s^{-1}}$ без промене правца и смера.
   а) Колика је маса планете?
   б) Какав геометријски облик има новонастала путања?

в) Одреди параметре новонастале путање. На пр., ако је то кружница, онда полупречник, ако је елипса, растојања перицентра и апоцентра, ако је парабола теме, итд.

г) Колика је брзина брода када је најудаљенији од планете?

**Решење.** а) Масу планете $\mathfrak{M}$ можемо одмах да израчунамо знајући израз за кружну брзину

$$V_0 = \sqrt{G\frac{\mathfrak{M}}{R_0}},$$

где је $G$ константа гравитације; вредност је $\mathfrak{M} = 2{,}2 \times 10^{25}$kg.

б) Након повећања брзине брода за $\Delta V$ облик његове путање ће се променити, неће више бити кружна. Нова брзина је

$$V^+ = V + \Delta V\ .$$

Вредност је $V^+ = 15\ \mathrm{km\ s^{-1}}$, што је мање од критичне брзине која је $\sqrt{2}$ пута већа од кружне - $V_{esc} = 12 \times \sqrt{2} \approx 17\ \mathrm{km\ s^{-1}}$, јер је

$$V_{esc} = \sqrt{2G\frac{\mathfrak{M}}{R_0}}.$$

в) Нова путања је елипса. Због тога што је $\overrightarrow{V^+} \perp \vec{r}$ ($\vec{r}$ - вектор положаја) и веће од кружне брзине, растојање перицентра је $r_p = R_0 = 10.000\ \mathrm{km}$. Растојање апоцентра $r_a$ можемо да одредимо на пр. из закона одржања специфичне (по јединици масе) енергије, тако што ћемо најпре одредити средње растојање $a$. Релација је

$$\frac{1}{2}{V^+}^2 - \frac{G\mathfrak{M}}{R_0} = -\frac{G\mathfrak{M}}{2a}\ .$$

Добија се $a = 22.857$ km. Имајући у виду следеће релације

$$r_p = a(1-e)\,, r_a = a(1+e)\ ;$$

налазимо $e = 0{,}562$ за ексцентричност и $r_a = 35.714$ km.

г) Из закона одржања енергије одредиће се и брзина $V(r_a)$,

$$V^2(r_a) = \frac{2G\mathfrak{M}}{r_a} - \frac{G\mathfrak{M}}{a}\ .$$

Резултат је $V(r_a) = 4{,}2\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Исто је могуће и из $r_p V(r_p) = r_a V(r_a)$ (одржање момента количине кретања).

Дуги задаци

1. Земљино магнетно поље

   а) Мала танка жичана проводна контура страница $\Delta x$ и $\Delta y$ кроз коју протиче струја јачине $I$ лежи у $xy$-равни са координатним почетком у пресеку дијагонала. Магнетни диполни момент је $m = IS$, где је $S$ површина обухваћена контуром. Показати да је правац магнетне индукције дуж осе $z$, тако да је њена интензивност изражена на следећи начин ($\mu_0$ - пермеабилност у вакууму, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{TmA^{-1}}$)

$$B(0,0,z) = \frac{\mu_0 m}{2\pi |z|^3}\ , \qquad B(x,0,0) = \frac{\mu_0 m}{4\pi |x|^3}\ .$$

   Ове релације важе за сваку малу танку струјну контуру, под условима да су у оба случаја апсолутне вредности координата много веће од димензија контуре.

   б) Усвојимо да је Земљино магнетно поље диполно са јужним магнетним полом на Гренланду у тачки $\lambda_P = -72°12'36"$, $\varphi_P = 80°4'48"$. Ако је магнетна индукција у близини Земљиног магнетног екватора једнака 30 $\mu$T, колика је магнетна индукција Земље у Београду ($\lambda_{Bg} = 20°28'0"$, $\varphi_{Bg} = 44°49'0"$)? Одреди и азимут и висину вектора магнетне индукције у Београду.

   в) Протон кинетичке енергије $\mathrm{T} = 1$ GeV упада у атмосферу нормално на магнетну индукцију на висини од 100 km. Ако претпоставимо да интензивност магнетне индукције Земље опада са трећим степеном радијалног растојања (у складу са диполним моделом) и да се њен правац и смер не мењају дуж радијуса, наћи полупречник кружнице по којој ће се протон кретати (маса мировања протона је 0,938 GeV/$c^2$).

   г) Наелектрисана честица која се креће убрзано у јединици времена израчи количину енергије

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 \mathfrak{m}^2} \frac{F^2 - c^{-2}\left(\vec{v} \cdot \vec{F}\right)^2}{1 - v^2/c^2}\ .$$

   Употребљене ознаке: $q$ - количина електрицитета, $\epsilon_0$ – електрична пропустљивост вакуума или диелектрична константа ($\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2m^{-2}N^{-1}}$), $c$ – брзина светлости, $\mathfrak{m}$ - маса честице, $F$ - сила која делује на честицу и $v$ брзина честице. Колики удео своје укупне енергије израчи протон из дела под в) током једног периода (време за које направи један обрт око линије сила магнетног поља)?

**Решење.** а) Према Био-Саваровом закону допринос кратког делића контуре дужине $\Delta l$ кроз који протиче струја јачине $I$ магнетној индукцији дат је као

$$\overrightarrow{\Delta B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{\Delta l} \times \vec{R}}{R^3} \ ,$$

где је $\vec{R}$ вектор положаја тачке у којој се одређује магнетна индукција. За почетак се узима делић дуж осе $y$ у тачки чије су координате: $-\Delta x/2$, 0 и $z$, под условом да је $|z|$ далеко веће од димензија контуре. Векторски производ $\overrightarrow{\Delta l} \times \vec{R}$ представљен матрично је $z\Delta l \quad 0 \quad \Delta l \Delta x/2$. Због услова за $|z|$може се написати $R^3 \approx z^3$. Даљи поступак онда тече овако. Матрица векторског производа за странице на оси $y$ је $\pm z\Delta y \quad 0 \quad \Delta y \Delta x/2$; а аналогно за осу $x$: $0 \quad \pm z\Delta x \quad \Delta x \Delta y/2$. Ово се множи скаларом једнаким $\mu_0 I/(4\pi z^3)$. Када се саберу ова четири елемента добија се да је правац магнетне индукције дуж осе $z$ и да је њена интензивност далеко од координатног почетка на овој оси

$$B(0,0,z) = \frac{\mu_0 I \Delta x \Delta y}{2\pi |z|^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi |z|^3} \ ,$$

с обзиром да је производ $\Delta x \Delta y$ једнак површини контуре. На оси $x$, далеко од контуре, доприноси проводних страница нормалних на ову осу ($x = \pm\,\Delta x/2$) биће слични онима израчунатим за осу $z$, с тим што је сада дужина вектора положаја приближно једнака $x$ уместо $z$. Има се следеће

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\Delta y \left[\frac{1}{(x+\Delta x/2)^2} - \frac{1}{(x-\Delta x/2)^2}\right] \approx -\frac{\mu_0 I \Delta x \Delta y}{2\pi |x|^3} \ .$$

За проводне странице паралелне оси $x$ допринос је

$$B_z = \frac{\mu_0 I \Delta x \Delta y}{4\pi |x|^3} \ .$$

Њихов збир је

$$B_z(x,0,0) = -\frac{\mu_0 I \Delta x \Delta y}{4\pi |x|^3} = -\frac{\mu_0 m}{4\pi |x|^3}.$$

б) Магнетна индукција на оси $x$ далеко од контуре је, дакле, усмерена супротно од индукције дипола. На магнетном екватору Земље је, према ономе што је добијено под а), магнетне индукције је дата изразом

$$\overrightarrow{B_0} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi {R_\oplus}^3} \ ,$$

где је $R_\oplus$ полупречник Земље. Магнетни момент је познат јер је дата вредност за $B_0$ (30 $\mu$T). Да би се израчунала вредност индукције Земљиног магнетног поља у Београду треба магнетни момент раставити на компоненте. Момент магнетног дипола растављамо на компоненту дуж полупречника (радијалну) и тангенцијалну. Оне су једнаке $m\cos\theta$ и $m\sin\theta$, респективно, где је $\theta$ угао између јужног магнетног пола и Београда. Он се одређује као страница сферног троугла на Земљиној површи чија су темена: N - северни географски пол, P - јужни магнетни пол и B Београд. У ту сврху с екористи косинусна теорема из Гаусове групе образаца (вид. константе). У примени на овај случај она гласи

$$\cos\theta = \sin\varphi_P \sin\varphi_{Bg} + \cos\varphi_P \cos\varphi_{Bg} \cos\left(\lambda_{Bg} - \lambda_P\right),$$

где су $\lambda$ и $\varphi$ географске координате темена P и B. Одавде се налази $\theta = 46{,}48°$. Даље се примењују разултати добијени у претходном кораку, али на случај Београда.  За разлику од магнетног екватора, где је само тангенцијална компонента различита од нуле ($\theta = 90°$), у Београду се обе разликују од нуле, те је

$$B_r = \frac{\mu_0 m\cos\theta}{2\pi {R_\oplus}^3}, \qquad B_t = \frac{\mu_0 m\sin\theta}{4\pi {R_\oplus}^3} \quad .$$

За интензивност магнетне индукције Земљиног поља у Београду добија се следећи израз

$$B_{Bg} = B_0\sqrt{3\cos^2\theta + 1} \quad .$$

Одговарајућа вредност је $B_{Bg} \approx 47\ \mu\mathrm{T}$. Пошто се радијална компонента односи на вертикалу, онда ће висина магнетне индукције бити одређена попут дужина штапа и његове сенке, тј.

$$h = \mathrm{arctg}\frac{B_r}{B_t} = \mathrm{arctg}(2\mathrm{ctg}\theta)\,.$$

Вредност је $h = 62{,}23°$. Азимут вектора магнетне индукције $A$ је повезан са углом код темена B у поменутом сферном троуглу NPB јер је тај угао суплементан азимуту. Из Гаусове групе образаца користи се синусна теорема (вид. константе) на основу које важи

$$\sin A = \frac{\sin\left(\lambda_{Bg} - \lambda_P\right)\cos\varphi_P}{\sin\theta},$$

због суплементности. Да би се добио коначан резултат за азимут могла би се користити и синусно-косинусна теорема из групе образаца (константе). Међутим, као угао наспрам најкраће странице сферног троугла онај код темена B треба да буде мали. Стога следи да је његов суплемент $A = 166{,}27°$. Ово се може потврдити и само одређивањем знака косинуса из синусно-косинусне теореме. Он је позитиван, што значи да је азимут вектора магнетне индукције у Београду туп угао, а угао код темена В оштар.

в) Како је маса мировања протона једнака 0,938 GeV/$c^2$, одговарајућа енергија је нешто мања од кинетичке енергије упадног протона из текста задатка. То значи да је протон у релативистичком режиму и у складу са тим полупречник кружнице, по којој се протон захваћен магнетним пољем Земље изнад Београда креће, се добија изједначавањем центрипеталне и Лоренцове силе

$$e\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\mathfrak{m}v^2}{r^2}\vec{r} \ ,$$

где је $r$ полупречник кружнице, $\mathfrak{m}$ маса протона и $e$ његово наелектрисање (елементарно наелектрисање, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C). Уводи се количина кретања $\vec{p}$, $\vec{p} = \mathfrak{m}\vec{v}$, па онда важи

$$r = \frac{p}{eB},$$

јер је $\vec{v} \perp \vec{B}$. Уношењем релативистичког израза за интензивност количине кретања добија се

$$r = \frac{\sqrt{(T + \mathfrak{m}_0 c^2)^2 - \mathfrak{m}_0{}^2 c^4}}{ceB} \ ,$$

где је $\mathfrak{m}_0$ маса мировања протона, а $T$ његова кинетичка енергија. За магнетну индукцију $B$ се замењује следећа вредност

$$B = B_{Bg}\left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + H}\right)^3,$$

где је $H$ дата висина. Пошто су све величине познате, добија се $B = 44{,}86\ \mu$T, тј. $r = 1{,}26 \times 10^5$ m.

г) Период се рачуна по формули

$$t = \frac{2\pi r}{v} \ .$$

Полупречник $r$ је познат, остаје још само да се одреди брзина $v$. Њу налазимо као количник количине кретања и масе протона, тј.

$$v = \frac{\dfrac{\sqrt{(T + \mathfrak{m}_0 c^2)^2 - \mathfrak{m}_0{}^2 c^4}}{c}}{\dfrac{T + \mathfrak{m}_0 c^2}{c^2}} = \frac{c\sqrt{(T + \mathfrak{m}_0 c^2)^2 - \mathfrak{m}_0{}^2 c^4}}{T + \mathfrak{m}_0 c^2} \ .$$

Коначно имамо: $v = 0{,}875\ c$,  $t = 3{,}02$ ms. Да би се израчунала величина $P$ потребна је сила $\vec{F}$. Пошто је $\vec{F} \perp \vec{v}$, следи $F = evB$ и $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$, с обзиром да је $q = e$. Са познатим величинама налазимо да је енергија која одговара добијеном времену $t$ реда величине $10^{-22}$ GeV. Ништавно мали удео.

2. Доплеров помак микроталасног позадинског зрачења

а) Температура микроталасног позадинског зрачења (реликтно зрачење) мерена са Земље је $T = 2{,}73$ K. Мерења показују да има диполну анизотропију амплитуде $\Delta T = 3{,}35$ mK. Процени брзину Локалне групе галаксија у односу на микроталасно позадинско зрачење.
б) Свемирски брод се креће брзином $v = 0{,}6\ c$. У ком опсегу ће посада мерити температуру микроталасног позадинског зрачења?
в) Извести образац за релативистички „коси" Доплеров ефект (зависност фреквенције детектованог зрачења од фреквенције емитованог зрачења, брзине којом се референтни систем креће у односу на лабораторијски систем и угла између визуре и правца кретања референтног система).
г) Колику температуру зрачења „види" посматрач из свемирског брода у делу б) из правца који заклапа угао од 30° са његовим правцем кретања?

Решење. а) Карактеристичне фреквенције $\nu$ за микроталасно позадинско зрачење су оне за које је $h\nu \approx k_B T$, где је $k_B$ Болцманова константа. Одатле имамо релацију

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = z = \frac{v}{c} \quad .$$

Последња једнакост је последица тога што смо у нерелативистичком режиму; $\Delta T/T = 1{,}227 \times 10^{-3}$, одакле следи $v = 3{,}68 \times 10^{5}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$.
б) Ако се посматрач креће брзином $v = 0{,}6\ c$ у односу на извор (микроталасно позадинско зрачење), време између два детектована таласна фронта $\delta t$ је дато релацијом $\lambda + v\delta t = c\delta t$, одакле следи

$$\delta t_0 = \frac{\lambda}{c - v} = \frac{1}{(1-\beta)\nu_0}\ , \beta = \frac{v}{c} \quad .$$

Време које посматрач мери између два детектована таласна фронта је $\delta t_0$, поправљено за дилатацију времена - $\delta t = \delta t_0/\gamma = \nu^{-1}$, где је $\gamma = \left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1}$. Следи

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad ,$$

а како је $\Delta\nu = |\nu - \nu_0|$ и $\Delta\nu/\nu = \Delta T/T$ (из а)), онда је

$$\Delta T = T\left|\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} - 1\right| .$$

Опсег је једнак половини температуре – $(2{,}73/2)$K.
в) Пратећи приступ из б) уз измену релације за $\delta t_0$: $\lambda + v\cos\theta\,\delta t = c\delta t$ добија се израз за „коси“ Доплеров ефект

$$\nu = \gamma(1 - \beta\cos\theta)\nu_0 .$$

Као што се одавде види, за $\theta = 0$ последња релација се своди на ону добијену у б).
г) Комбиновањем резултата из б) и в) налазимо

$$\Delta T = T\left|\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right| .$$

Уврстимо ли дату вредност ($\theta = 30°$), добијамо $\Delta T = 0{,}4\,T$.

## ОБРАДА ПОДАТАКА

1. У таблици су дати подаци о звездама главног низа Херцшпрунг-Раселовог дијаграма. Начини график зависности масе од апсолутне звездане величине $M_v$. Привидне визуалне величине двојне звезде, где су обе компоненте на главном низу, су $m_1 = 8{,}87$ и $m_2 = 10{,}08$ (индекс V је изостављен из практичних разлога). Растојање овог звезданог пара од Сунца је $s = (140 \pm 20)$ pc, период обиласка $P = (25 \pm 1)$ година, а привидна велика полуоса релативне орбите је $\alpha = (0{,}10 \pm 0{,}01)''$. Међузвездана екстинкција је занемарљива. Користећи график одреди укупну масу система, а затим и растојање до њега *динамичким путем*. Тако добијено растојање упореди са горе датим.

   Таблица 1.    Подаци о звездама главног низа

   | Класа спектра | $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot$ | $M_v$ |
   |---|---|---|
   | O3 | 120 | $-6{,}0$ |
   | O5 | 60 | $-5{,}7$ |

| | | |
|---|---|---|
| O8 | 23 | $-4{,}9$ |
| B0 | 17,5 | $-4{,}0$ |
| B3 | 7,6 | $-1{,}6$ |
| B5 | 5,9 | $-1{,}2$ |
| B8 | 3,8 | $-0{,}2$ |
| A0 | 2,9 | 0,6 |
| A5 | 2,0 | 1,9 |
| F0 | 1,6 | 2,7 |
| F5 | 1,3 | 3,5 |
| G0 | 1,05 | 4,4 |
| G5 | 0,92 | 5,1 |
| K0 | 0,79 | 5,9 |
| K5 | 0,67 | 7,4 |
| M0 | 0,51 | 8,8 |
| M5 | 0,21 | 12,3 |
| M7 | 0,12 | 14,3 |
| M8 | 0,06 | 16,0 |

**Решење.** За цртање графика постоје две могућности: или да се не уврсте звезде веома великих маса (на пр. прве три врсте), јер су те звезде веома ретке, или да се уместо датих маса користе њихови логаритми. За компоненте двојне звезде користимо познату релацију

$$M_v = m_v - 5\log s + 5 \ ,$$

с обзиром на то да је екстинкција занемарљива. Резултат је: $M_1 = 3{,}14$, $M_2 = 4{,}35$. Према графику одговарајуће масе би биле: $\mathfrak{M}_1 = 1{,}33\ \mathfrak{M}_\odot$, $\mathfrak{M}_2 = 1{,}05\ \mathfrak{M}_\odot \Longrightarrow \mathfrak{M}_{tot} = 2{,}38\ \mathfrak{M}_\odot$. Сада ће се рачунати дужина велике полуосе коришћењем трећег Кеплеровог закона

$$a = \sqrt[3]{P^2\mathfrak{M}_{tot}} \ \ ,$$

где је период изражен у годинама, а маса у масама Сунца, добија се $a = 11{,}415$ aj. Пошто је растојање једнако количнику $a/\alpha$, следи $s_{dyn} = 114{,}15$ pc. Поређење захтева одређивање грешке. За величину $s_{dyn}$ може се написати

$$\delta s_{dyn} = \delta a + \delta\alpha,\ \ \delta a = \frac{1}{3}(2\delta P + \delta\mathfrak{M}_{tot}).$$

Ознака $\delta$ се односи на релативне грешке. Релативна грешка масе није позната. Међутим, имајући у виду график може се написати $\delta\mathfrak{M}_{tot} = 0{,}02/2{,}38 = 8{,}4 \times 10^{-3}$. Тако најзад налазимо $\delta s_{dyn} = 0{,}12947$, множење $\delta s_{dyn} s_{dyn}$ даје $\Delta s_{dyn} = 14{,}7786$ pc. Заокругљивањем, обавезно на више јер је у питању апсолутна грешка, добијамо $\Delta s_{dyn} = 20$ pc. Усваја се $s_{dyn} = (110 \pm 20)$ pc. Закључујемо да се два растојања слажу у границама грешке јер је: $s = (140 \pm 20)$ pc; пресек је интервал $[120, 130]$ pc.