РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2015

ТЕОРИЈА

Кратки задаци

1. Кроз територију Србије пролази меридијан $\lambda = 20°$ дужином од 334 km. Два посматрача се налазе на овом меридијану – један на крајњем северу Србије, а други на крајњем југу. За колико ће се за њих разликовати висина Сунца у право подне?

Решење. На подручју Србије Сунце увек кулминује јужно од зенита. Горња кулминација било ког небеског тела, па тако и Сунца, дата је релацијом

$$h_\odot = 90 - \varphi + \delta_\odot \,,$$

где је φ географска ширина места посматрања, а $\delta_\odot$ деклинација Сунца. Два посматрача се налазе на различитим географским ширинама φ_1 и φ_2. Треба да нађемо разлику висина Сунца

$$\Delta h_\odot = h_{\odot 1} - h_{\odot 2} = \left(90 - \varphi_1 + \delta_\odot\right) - \left(90 - \varphi_2 + \delta_\odot\right) ,$$

$$\Delta h_\odot = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \,.$$

Да бисмо нашли $\Delta\varphi$ искористимо дато растојање између посматрача и обим Земље и образујмо пропорцију

$$\Delta\varphi[°]: 2\pi[°] = 334\ \mathrm{km} :\ 2\pi R_\oplus[\mathrm{km}] \,.$$

Тако налазимо $\Delta\varphi \approx 3°$, што значи да је одговор на питање $\Delta h_\odot = 3°$.

2. У неко доба ноћи љубитељ астрономије је видео како геостационарни сателит пролази тачно кроз центар Месечевог диска. На којим географским ширинама је могуће видети овај призор?

Решење. Геостационарни сателит је сателит који у равни екватора кружи око Земље угаоном брзином једнаком угаоној брзини Земљине ротације. Због тога се такав сателит увек налази изнад једне те исте тачке на Земљиној површи. Узимајући да је сидерички дан на Земљи, T_S, једнак $23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}04^{\mathrm{s}} \approx 1$ дан по Сунцу, одредимо полупречник геостационарне орбите, a_S , из трећег Кеплеровог закона

$$\left(\frac{T_S}{T_M}\right)^2 = \left(\frac{a_S}{a_M}\right)^3 \ ,$$

где се величине са индексом M односе на Месец. Добија се $a_S \approx 42 \times 10^3$ km. Сада треба одредити географске ширине, φ, на којима се геостационарни сателит, S, може видети на истој визури као и центар Месечевог диска (види скицу).

Очигледно да је овај услов испуњен за посматрача на Земљином екватору ($\varphi = 0°$, Месец у тачки L_0), али и за неки гранични опсег географских ширина који и треба одредити. Нађимо граничну географску ширину са које се може видети геостационарни сателит и одредимо деклинацију Месеца, δ_M, која задовољава услов дат у поставци задатка – да се налази на истој визури као и сателит. Из правоуглог троугла OO'S (O' – тачка на Земљиној површи, S – положај сателита), где је OO'$= R_\oplus$, следи

$$\varphi = \arccos\frac{R_\oplus}{a_S} \ ;$$

$\varphi = 81{,}3°$, а из троугла OO'L (L – положај Месеца)

$$\varphi + \delta_M = \arccos\frac{R_\oplus}{a_M} \ .$$

Збир ова два угла износи $88{,}8°$, па је $\delta_M \approx 7{,}5°$. Јасно је да Месечева деклинација може да има ову вредност јер је угао између еклиптике и екватора ε далеко већи. Дакле, посматрање пролаза геостационарног сателита преко центра Месечевог диска је могуће са географских ширина на којима су ова два сателита (природни и вештачки) видљива, тј. $\varphi \in [-81{,}3°, +81{,}3°]$.

3. Однос маса Плутона и Харона је 8,6. Харон обиђе око плутона за 6,4 земаљских дана. Маса Плутона је 13×10^{21} kg. Докажи да је систем Плутон-Харон тзв. двојна планета (центар маса се налази изван тела, како Харона тако и Плутона). Подразумева се да полупречник Плутона није познат.

Решење. Растојање између Плутона и Харона, a, налазимо из III Кеплеровог закона

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{G(\mathfrak{M}_P + \mathfrak{M}_H)} \Longrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{GT^2(\mathfrak{M}_P + \mathfrak{M}_H)}{4\pi^2}} \quad .$$

Добија се $a = 20 \times 10^3$ km. Као што је познато, растојање од центра маса је обрнуто пропорционално маси тела, па је растојање Плутона од барицентра

$$r_P = a\frac{\mathfrak{M}_H}{\mathfrak{M}_P + \mathfrak{M}_H} \quad .$$

Следи $r_P \approx a/10 = 2 \times 10^3\ \mathrm{km}$. Полупречник Плутона нам није познат, али нам је позната његова маса. Израчунаћемо средњу густину Плутона полазећи од највеће могуће вредности за његов полупречник R_P, а то је $R_P = r_P$. Густина ће бити

$$\rho_P = \frac{\mathfrak{M}_P}{\frac{4}{3}\pi {R_P}^3} \quad .$$

Добијена вредност је 3,9$\times\ 10^2 \mathrm{kg\ m^{-3}}$, мање од густине воде (1000 $\mathrm{kg\ m^{-3}}$), што није реално. Закључујемо да се барицентар система Плутон-Харон налази ван тела Плутона, а сигурно и ван тела Харона, јер је овај мањи од Плутона. Ово је довољан доказ да је систем Плутон-Харон двојна планета (боље рећи двојна патуљаста планета).

Средња густина Плутона износи око $2 \times 10^3 \mathrm{kg\ m^{-3}}$, а полупречник му је око 1153 km.

4. Процени максималан пад сјаја звезде сличне Сунцу при пролазу планете која кружи око ње (у звезданим величинама).

Решење. Јасно, максималан пад сјаја звезде ће бити при централном прелазу планете максималног пречника преко њеног диска. Ако занемаримо потамњење ка рубу звезде и сматрамо (оправдано) да се звезда и планета налазе на истој удаљености од нас , тада Погсонов закон можемо написати у облику

$$\Delta m = -2{,}5\frac{E_* - E_P}{E_*} = -2{,}5\log\frac{{R_*}^2 - {R_P}^2}{{R_*}^2} = -2{,}5\log\left(1 - \frac{{R_P}^2}{{R_*}^2}\right).$$

Колики може да буде највећи полупречник планете, а да она и даље остане планета (да не буде звезда)? Кренимо од чињенице да је гранична маса за планету 10 Јупитерових маса (ово треба знати), после чега она постаје звезда. Ако претпоставимо да је средња густина такве планете приближно једнака Јупитеровој (ово је прихватљива претпоставка), тада ће њен полупречник бити приближно $\sqrt[3]{10} \approx 2$ пута већи од Јупитеровог. Како је Јупитер 10 пута мањи од Сунца (и ово треба знати), тада ће ова планета бити пет пута мања од матичне звезде. Сада Погсонов закон можемо записати као

$$\Delta m = -2{,}5 \log(1 - 5^{-2}) \approx 0{,}04.$$

Може се извести и строжа оцена. У литератури се за максималну масу планете често наводи и 13 Јупитерових маса. Густина овако велике планете би била мања од Јупитерове, рецимо, два пута, ради једноставности. Тада би максимални полупречник планете био $2\sqrt[3]{13} \approx 5$ пута већи од Јупитеровог, што је само два пута мање од Сунчевог. Процена пада сјаја звезде би тада била

$$\Delta m = -2{,}5 \log(1 - 2^{-2}) \approx 0{,}25.$$

5. На растојању R =85 kpc од средишта наше галаксије (Млечног пута) налази се мала сферна галаксија чија је маса $\mathfrak{m} = 4 \times 10^{36}$ kg. Колики може да буде максимални полупречник ове галаксије (r), а да не буде развејана услед плимских сила од Млечног пута? Маса Млечног пута је $\mathfrak{M} = 2 \times 10^{41}$ kg.

Решење. Када би сваки део мале галаксије био под дејством исте гравитационе силе која потиче од Млечног пута, тада уопште не би било плимског ефекта. Међутим, тачка 1 је најближа Млечном путу, па је сила која делује на њу већа не го за тачку 3 која је најдаља. Зато тачке 1 и 3 теже да се удаље једна од друге. Ово, заправо, и јест плимски ефект који би разнео малу галаксију, када њена сопствена сила гравитације усмерена ка њеном средишту не би била довољна да је задржи на окупу.

Нека је g_1 јачина гравитационог поља Млечног пута у тачки 1, а g_3 исто за тачку 3. Између ових двеју тачака на средини налази се средиште мале галаксије, тачка 2. Јачине гравитационог поља мале галаксије у овим тачкама су g'_1 и g'_3, усмерене ка њеном средишту.

Напишимо изразе за интензивности укупне јачине гравитационог поља у тачкама 1 и 3

$$(g_1 - g'_1) = \frac{G\mathfrak{M}}{(R-r)^2} - \frac{G\mathfrak{m}}{r^2} \ ,$$

$$(g_3 + g'_3) = \frac{G\mathfrak{M}}{(R+r)^2} + \frac{G\mathfrak{m}}{r^2} \ .$$

Ако је $(g_1 - g'_1) > (g_3 + g'_3)$, тада ће се звезде у тачкама 1 и 3 приближавати, а ако је $(g_1 - g'_1) < (g_3 + g'_3)$, тада ће се удаљавати једне од других и мала галаксија ће бити развејана. Дакле, да бисмо нашли граничну вредност за полупречник мале галаксије при којој плимске силе је неће развејати, треба ове јачине поља уравнотежити, тј. изједначити

$$\frac{G\mathfrak{M}}{(R-r)^2} - \frac{G\mathfrak{m}}{r^2} = \frac{G\mathfrak{M}}{(R+r)^2} + \frac{G\mathfrak{m}}{r^2} \ .$$

Ово значи да за гранични полупречник важи

$$r^3 = \frac{\mathfrak{m}}{2\mathfrak{M}} R^3 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 .$$

С обзиром на чињеницу $r \ll R$ биће $(1 - r^2/R^2)^2 \approx 1$, па је

$$r = R \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{m}}{2\mathfrak{M}}} \ .$$

Коначан резултат $r = 1{,}8$ kpc.

Дуги задаци

1. Звезде истог азимута

За посматрача у Београду ($\lambda_1 = 20°27'44"$, $\varphi_1 = 44°49'14"$) две познате звезде се у неком тренутку налазе изнад хоризонта и имају исти азимут $A = 19°0'0"$. За посматрача у месту X ове две звезде тада истовремено залазе. а) Које су географске координате места X? б) Процени разлику трајања обданица на дан такмичења (19. април) у Београду и месту X. Где је обданица дужа?

Решење. а) Пре свега, да би звезде Σ_1 и Σ_2 имале исти азимут, потребно је да тада буду на истом вертикалу и истој небеској хемисфери (у случају датом овде за Београд, то је западна хемисфера)**.** Тај део вертикала истовремено је половина хоризонта, такође на западној хемисфери, за посматрача из места X. То значи да Београд и место X раздваја лук велике кружнице на Земљиној површи (узетој као сфера) коме одговара централни угао једнак 90°. Постоје две тачке које одговарају овом геометријском услову, али само једна од њих ће дати место посматрача за кога ове две звезде истовремено залазе (у том тренутку), док ће друга тачка представљати место у којем те две звезде истовремено излазе.

Уочимо сферни троугао на Земљи $P_N Z_{BG} Z_X$. Већ смо закључили да је лук за страницу $Z_{BG} Z_X$ једнак 90°. Аналогно, угао код тачке Z_X за посматрача из Београда мора да буде 90+A, где је A онај азимут на коме се две звезде налазе, тј. да су углови на луку $Z_{BG} Z_X$ суплементни. Одатле следи да је угао у разматраном сферном троуглу код темена Z_{BG} једнак 90 $-A$. Централни углови у сферном троуглу за странице $P_N Z_{BG}$ и $P_N Z_X$ су једнаки допунама географске ширине. Угао код северног Земљиног пола P_N једнак је разлици географских дужина. Применом косинусне теореме добија се

$$\cos(90-\varphi_X) = \cos(90-\varphi_{BG})\cos 90 + \sin(90-\varphi_{BG})\sin 90 \cos(90-A) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sin\varphi_X = \cos\varphi_{BG}\sin A \ .$$

На крају је $\varphi_X = 13°21'6{,}9"$. Затим синусна теорема даје разлику географске дужине

$$\frac{\sin 90}{\sin|\lambda_{BG}-\lambda_X|} = \frac{\sin(90-\varphi_X)}{\sin(90-A)} \ .$$

Следи да је разлика географских дужина једнака $76{,}3574°$. Пошто у месту X дате звезде залазе, а у Београду су још увек изнад хоризонта, онда мора бити $\lambda_X > \lambda_{BG}$, па је $\lambda_X = 96°49'10{,}7"$; може да се добије и из Неперовог правила

$$\cos|\lambda_{BG}-\lambda_X| = \mathrm{ctg}(90-\varphi_{BG})\mathrm{ctg}(90-\varphi_X) \ldots$$

б) Да би се проценило трајање обданице потребно је проценити деклинацију Сунца за 19. април. Од дана пролећне равнодневице (20. март 2015) протекло је 11 дана у марту и 19 дана у априлу, тј. 30 дана. За еклиптичку лонгитуду Сунца имамо

$$\lambda_\odot = \frac{30}{365{,}2422} 360° \ .$$

Рачун даје $\lambda_\odot = 29°34'9{,}9"$. Сферна тригонометрија нам даје

$$\sin\delta_\odot = \frac{\sin\varepsilon \sin\lambda_\odot}{\sin 90} \ .$$

Тражена деклинација је $11°19'3"$. За трајање обданице потребне су вредности часовног угла за излаз и залаз. На распологању је позната једначина

$$\cos t = -\mathrm{tg}\varphi \mathrm{tg}\delta_\odot \ ,$$

која има два решења, за излаз и за залаз. У оба случаја (Београди и место X) решења су у трећем квадранту (излаз) и другом (залаз), јер су оба места на северној хемисфери и доба године је пролеће. Београд је северније и обданица траје дуже - $13^{\mathrm{h}}41^{\mathrm{m}}50^{\mathrm{s}}$ - у месту X $12^{\mathrm{h}}28^{\mathrm{m}}56^{\mathrm{s}}$, разлика је $1^{\mathrm{h}}12^{\mathrm{m}}54^{\mathrm{s}}$.

2. Супернова

Приликом експлозије супернове типа IIn снимљен је спектар. У линији водоника H_α идентификоване су две доминантне компоненте са нормалним расподелама (Гаусовим) по таласној дужини. Код једне линије централна таласна дужина је $\lambda_1 = 666{,}8$ nm, док је ширина на половини максималне висине расподеле $a_1 = 5{,}0$ nm, а код друге $\lambda_2 = 660{,}2$ nm и $a_2 = 30{,}0$ nm. Привидна звездана величина супернове у максимуму сјаја била је 17,8.

а) Одреди таласну дужину која одговара линији H_α на основу Боровог модела атома.
б) Одреди Доплеров помак матичне звезде и њену радијалну брзину.
в) Нађи температуру околне средине у којој се оригинална звезда налазила.
г) Под претпоставком да је апсолутна звездана величина супернове у максимуму сјаја била $M = -17$ одреди растојање до ње. Одреди и растојање на основу радијалне брзине матичне звезде. Упореди добијене вредности. Објасни постојање разлике.
д) Ако супернова одбацивањем омотача изгуби 80% своје масе и ако је однос максималних интензитета компоненти линије H_α $I_{max1}/I_{max2} = 1{,}65$, процени масу материје у околини звезде родитеља супернове изражену у масама звезде родитеља.

Решење.
а) Балмерова серија се односи на прелазе електрона са виших (3,4,5, …) на други енергетски ниво. Индекс α означава да је то прва линија у серији (прелаз са најмањом енергијом унутар серије). Из Боровог модела атома добијамо за таласну дужину линије $\lambda_0 = 656{,}3$ nm, јер је

$$\frac{1}{\lambda_0} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) .$$

(R је Ридбергова константа).

б) Доплеров помак матичне звезде једнак је Доплеровом помаку околне материје, будући да она практично нема додатно радијално кретање у односу на нас, тј. нема макроскопског кретања околне материје у односу на матичне звезду. Околна материја је хладнија и самим тим има уже спектралне линије, па се може закључити да је реч о првој компоненти спектралне линије, тј.

$$z = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = 0{,}016 .$$

Пошто овај помак није велик, може се користити нерелативистичка формула за Доплеров помак

$$v_{rad} = zc\ ,$$

која даје $v_{rad} = 4800\ \mathrm{km\ s^{-1}}$.

в) Температуру околне средине налазимо из ширине спектралне линије на половини максималне висине расподеле. Веза између ове величине и стандардне девијације код нормалне (Гаусове) расподеле је

$$a = 2\sqrt{2\ln 2}\quad \sigma.$$

С друге стране, стандардна девијација је са температуром повезана на следећи начин

$$\sigma = 10^3 \lambda_{sr} \sqrt{\frac{kT}{mc^2}}\ .$$

Овде је: k Болцманова константа, T температура, m маса честице (атома, молекула или јона) од које потиче посматрана линија. У конкретном случају то је атом водоника чија маса износи $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg. За λ_{sr} се не узима λ_0, него таласна дужина на којој се налази максимум компоненте, тј. λ_1. Тако се за температуру околне средине добија $T = 110$ K.

г) Растојање до супернове најпре одређујемо из Погсоновог закона

$$M = m + 5 - 5\ ,$$

где је растојање r изражено у парсецима; $r = 91$ Mpc. Затим, знајући радијалну брзину одређујемо исто растојање уз помоћ Хабловог закона

$$r = \frac{v_{rad}}{H}\ .$$

Овог пута резултат је $r = 68$ Mpc. Разлика се објашњава неурачунавањем међузвездане екстинкције код примене Погсоновог закона.

д) За ову процену претпостављамо да је материја избачена из супернове сачињена махом од водоника, баш као и околна материја. Однос маса одбаченог материјала и околне материје једнак је односу површина испод одговарајућих компоненти линије H_α. Површина под нормираном Гаусовом кривом једнака је 1 и тада испред изложиоца стоји чинилац нормализације $\left(\sqrt{2}\sigma\right)^{-1}$. У случају датих компоненти оне имају облик

$$\mathrm{f}(\lambda) = I_{max} \exp\left({\lambda - \lambda_{sr}}/{2\sigma^2} \right)\ ,$$

а површина испод компоненте је

$$S = I_{max} \sigma \sqrt{2\pi}\ .$$

Следи да је однос маса

$$\frac{\mathfrak{M}_{ok}}{\mathfrak{M}_{om}} = \frac{I_{max_{ok}} a_1}{I_{max_{om}} a_2} \ .$$

Једнак је 0,275, па је $\mathfrak{M}_{ok} = 0{,}275 \times 0{,}8\ \mathfrak{M}_{*} = 0{,}22\ \mathfrak{M}_{*}$.

ОБРАДА ПОДАТАКА

1. Таблица 1 садржи резултате мерења привидне звездане величине, m, за променљиву звезду δ Cephei, заједно са тренуцима када су мерења обављена.
   а) Конструиши криву сјаја.
   б) Одреди растојање до ове звезде (међузвездану екстинкцију занемари) ако се зна да за њу, као класичну цефеиду, важи релација
   $$\overline{M} = -1{,}5 - 1{,}74\ \log P\ ,$$
   где је $\overline{M}$ средња апсолутна величина, P период промене сјаја изражен у данима.
   в) Процени грешку у одређивању растојања при чему сматрај да су грешке коефицијената у релацији једнаке нули.
   г) На истом листу милиметарске хартије (испод криве сјаја), током истог периода у коме су обављена мерења привидног сјаја, редом скицирај криве радијалне брзине δ Сер при чему се зна да се промена њене радијалне брзине креће у границама $\pm 20\ \mathrm{km\ s^{-1}}$, затим температуре, за коју је $\Delta T = \pm 500$ K, и односа полупречника R/R_{min} који се креће у границама од 1,0 до 1,14.
   д) Којим спектралним класама и класама луминозности припадају цефеиде?
   ђ) Зашто се цефеиде користе као стандардне свеће?
   Таблица 1. Привидна величина δ Сер

t (дан)	m
0	4,12
1	4,28
2	4,20
3	3,55
4	3,80
5	4,00
6	4,20

7	4,30
8	3,95
9	3,55
10	3,85
11	4,10
12	4,28
13	4,30
1,5	4,30

Решење. а) На графику је крива сјаја.

б) Разматрањем распореда тачака долази се до закључка за период промене сјаја - $P = (6{,}0 \pm 0{,}5)$ дана. Средина интервала привидне величине ($m \in \ [3{,}5,\ \ 4{,}5]$) је $\overline{m} = 4{,}00$. Пошто су вредности у Таблици 1 дате са две децимале, може се написати $\overline{m} = 4{,}00 \pm 0{,}01$. Уз помоћ релације дате горе налазимо средњу апсолутну величину $\overline{M}$, $\overline{M} = -2{,}85$, што значи да је хелиоцентрично растојање $d = 234$ pc, јер је

$$\overline{m} - \overline{M} = 5 \log d - 5 \,,$$

с обзиром на то да је екстинкција занемарљива.

в) Грешка растојања Δd зависи од грешака звезданих величина; за привидну је она позната, а за апсолутну зависи само од грешке логаритма периода, с обзиром на занемаривање грешака коефицијената. Грешку величине $\overline{M}$ можемо изразити на следећи начин

$$\Delta\overline{M} = \frac{1}{\ln 10}\frac{\Delta P}{P} \ .$$

Сабирањем ове вредности са грешком привидне величине добијамо вредност од око 0,05. Онда примењујући сличан поступак имамо

$$\frac{\Delta d}{d} = \ln 10 \cdot 0{,}05 \,.$$

Коначно: $\Delta d \approx 0{,}1 d \Longrightarrow d = (230 \pm 20)$ pc.

г) График промене сјаја нам указује да је разлика звезданих величина за највећи и најмањи сјај једнака 1,0. Приписаћемо ову разлику односу екстремних вредности луминозности, тј. он је око 2,5, луминозност је пропорционална $R^2 T^4$. С обзиром на дате вредности $1 \leq R/R_{min} \leq 1{,}14$, налазимо одговарајући однос температуре. Тако имамо све што је потребно да се скицирају тражени графици.

д) Класе спектра су F и G, класе луминозности џинови и суперџинови.
ђ) Цефеиде су пулсирајуће променљиве звезде. Цефеиде истог периода промене сјаја су по физичким карактеристикама веома сличне. Посматрањима је установљена веза између њихове луминозности и промене сјаја (Хенријета Ливит). Ово је најважнија особина цефеида која је омогућила одређивање димензија Млечног пута и удаљености до Магеланових облака и Андромедине маглине (Шепли). Како су веома сјајне, могу се идентификовати, па тиме и одредити растојања до звезданих система, до око 15 Mpc.

2. Пре него што покрене истрагу, свемирски агент Боб те је задужио да откријеш каква је то планета помрачила звезду Белградис (Боб једино зна да је индекс боје звезде Белградис $CI = 0$). Твоји посматрачи су ти оставили обрађена посматрања, али као што ћеш приметити у Табели 2, последње посматрање није обрађено. Обрада овог посматрања ће бити твој први задатак, а потом да на основу криве сјаја утврдиш однос пречника звезде Белградис и планете која обилази око ње.
I део. Комплетирање посматрања. У додатку ћеш пронаћи снимке последњег посматрања CCD камером (6×9 пиксела) за тренутак JD=32,10623+2 430 000, као и кратко упутство шта сваки од њих представља. На снимцима се налазе две звезде – Белградис и REF A звезда. REF A је поредбена звезда константне осветљености. На основу односа осветљености забележених за звезду Белградис (E) и за поредбену звезду REF A (E_A) може се утврдити релативна, односно нормирана, осветљеност (E/E_0). Познато је да би забележена осветљеност звезде REF A (E_A) била једнака осветљености звезде Белградис (E_0) уколико би температура звезде REF A била за 6670 K већа. Осветљеност E_0 је вредност осветљености звезде Белградис када планета не заклања ниједан део њеног диска.
II део. Прелаз планете. Одабери 12 посматрања из Табеле 2 и нацртај криву сјаја звезде Белградис. На основу дубине минимума пронађи однос пречника планете и звезде.
Табела 2: Тренуци посматрања и релативна осветљеност

JD $[+2\ 430\ 000]$	E/E_0
31,93205	1,000706
31,93828	1,000501
31,94392	0,995923
31,94955	0,992779
31,95193	0,989362
31,95786	0,986765

31,9635	0,987039
31,97062	0,985057
31,98457	0,98492
32,00059	0,98369
32,01157	0,984647
32,02374	0,98451
32,03205	0,985945
32,04303	0,986355
32,04659	0,988611
32,05074	0,989772
32,0543	0,993052
32,0546	0,995376
32,06083	0,997904
32,06142	1,00009
32,06825	0,999886
32,07359	1,000091
32,0997	1,000433
32,10623	?

Додатак

Теоријски увод

Приликом снимања CCD камером сем фотона који припадају самом посматраном објекту, региструју се и фотони које називамо шумовима – стога се сем снимка који садржи информације о објекту (LIGHT frame, енг.) узимају и други снимци (BIAS, DARK и FLAT frame, енг.) са циљем да се отклоне те сметње. У приложеним табелама су дате вредности очитане из ћелија CCD камере (одброј, pixel count, енг.). Вредност одброја се повећава за 1 сваки пут када се у ћелији региструје настанак једног слободног електрона услед фотоелектричног ефекта. BIAS фрејм одговара шуму очитавања слике са CCD чипа – присутан је на сваком снимку. Узима се са затвореном блендом и временом експозиције $t = 0$ s. THERMAL фрејм одговара шуму насталом услед термалног кретања електрона и пропорционалан је времену експозиције директно и пропорционалан је четвртом степену температуре камере изражене у K. Овај (THERMAL) фрејм се добија одузимањем фрејма BIAS од фр. DARK. DARK се узима са затвореном блендом. FLAT фрејм – након што му се одузму BIAS и THERMAL фрејм (одговарајуће експозиције и температуре) назива се MASTER FLAT фрејм, односно MFLAT фрејм. Он служи уједначавању способности одговора различитих ћелија на светлост (неравномерност у осетљивости ћелија) – LIGHT фрејм (коригован на BIAS и THERMAL) се дели са MFLAT фрејмом да би се добио снимак са униформним одговором CCD камере. Са овако коригованог LIGHT фрејма добијају се подаци о посматраним објектима. Опис приложених снимака

На приложеном, делимично коригованом, LIGHT фрејму се налазе ликови звезде Белградис (доњи десни угао) и звезде REF A (горњи леви угао). На основу односа осветљености звезда добијених са редукованог снимка и раније дате напомене за звезду REF A установи однос E/E_0 за дато посматрање и допуни Табелу 2.

Овом LIGHT фрејму је одузет BIAS фрејм тако да је још потребно извршити корекцију на THERMAL и MFLAT, који су такође приложени. Информације о трајању експозиција и температури камере којом су снимљени LIGHT, THERMAL и MFLAT фрејмови дате су у табели.

	Температура [K]	Експозиција [s]
LIGHT	261	5
THERMAL	261	50
MFLAT	261	5

LIGHT FRAME

64	66	63	63	65	62
64	177	179	63	63	62
64	177	178	64	64	65
64	64	64	64	65	64
62	65	63	65	64	64
62	63	3536	3945	3741	64
63	65	3740	4151	3947	63
64	65	4151	4151	4150	62
63	63	63	65	63	62

THERMAL FRAME

541	550	539	550	540	539
540	540	541	540	550	540
540	550	540	550	540	550
541	540	540	540	539	541
540	550	541	550	540	550
539	540	540	540	540	540
540	550	540	550	550	550
541	540	550	540	541	540
540	539	540	550	540	550

MASTER FLAT FRAME

100	100	95	80	100	80
100	100	100	85	80	85
95	100	100	90	100	100
100	95	100	95	100	95
80	100	100	100	100	90
90	80	85	95	90	100
90	100	90	100	95	85
100	100	100	100	100	80
100	90	90	95	85	80

НАПОМЕНА. Није потребно извршити обраду сваке ћелије! Довољно је уочити ћелије на којима се налазе звезде и пар ћелија „празног неба“.

Решење. а) Закључивање температуре звезда *Белградис* и REF A. На основу индекса боје ($CI = 0{,}0$) се добија да је температура звезде *Белградис* $T_0 = 10.000$ K. Из каснијег текста се може закључити да је REF A за 6670 K хладнија, тј. $T_A = 3330$ K; значи $T_0 \approx 3T_A$.

б) На основу закона зрачења црног тела ($\varepsilon = \sigma T^4$) и текста задатка можемо закључити да се осветљености ове две звезде односе као $E_A : E_0 = 1 : 81$ - са овим сазнањем можемо вредности очитане са редукованог снимка да повежемо са E_0.

в) Почетак редукције. Одузимање скалираног THERMAL од LIGHT фрејма. Довољно је узети поља која одговарају звездама, као и неколико поља са којих се касније очита позадина неба (у тексту се каже да је позадина неба униформна). Резултати за целу табелу (поља са звездом су означена масно).

10	11	9	8	11	8
10	**123**	**125**	9	8	8
10	**122**	**124**	9	8	8
10	10	10	10	11	10
8	10	9	10	10	9
8	9	**3482**	**3891**	**3687**	10
9	10	**3686**	**4096**	**3892**	8
10	11	**4096**	**4097**	**4096**	8
9	9	9	10	9	7

г) Комплетирање редукционог процеса – дељење LIGHT са MFLAT за одговарајућа поља. Рекалибрисали смо са коефицијентом 100, али такмичари нису обавезни да изврше калибрацију, а и да се одлуче на тај корак, слободни су да изврше калибрацију коју желе. Резултати за целу табелу.

10	11	9	10	11	10
10	**123**	**125**	10	10	9
10	**122**	**124**	10	10	10
10	11	10	10	11	10
10	10	9	10	10	10
9	11	**4097**	**4096**	**4097**	10
10	10	**4095**	**4096**	**4097**	9
10	11	**4096**	**4097**	**4096**	10
9	10	10	11	10	9

д) На основу овог снимка добија се за позадину неба вредност једнака 10, а сабирањем са вредностима у ћелијама након одузимања 10 пикселских одброја за сваку ћелију добијамо $E_A = 454$ пикселских одброја, односно $E = 36.777$ пикселских одброја. Може се закључити да је однос E/E_A једнак 81,007371, односно $E = 1{,}000091\ E_0$.

II део – Нацртај график E/E_0 у функцији времена (највећа вредност односа нешто већа од 1,0, најмања око 0,983).

II-2. Имајући у виду минимум закључује се да је $\Delta(E/E_0) = R^2/{R_*}^2$, односно да је $R^2/{R_*}^2 = 1 - 0{,}985$, тј. однос пречника планете и звезде је једнак 0,12247.

ПОСМАТРАЊЕ

1. а) На звезданој карти датој у хоризонтском систему (азимут мерен од северне тачке, A_N) повежи звезде које образују астеризам. Пролећни троугао (онај који заузима мању површину на небеској сфери). Наведи њихова имена и сазвежђа којима припадају (српски и латински).
   б) Једна од страница троугла прелази преко сазвежђа које не садржи ниједно од темена Пролећног троугла. Које је то сазвежђе (српски и латински)?
   в) Наведи пет Месијеових објеката који се налазе унутар Пролећног троугла.
2. а) Која планета се цела види на овој карти (знатно изнад хоризонта)? Заокружи ознаку и поред напиши име планете.
   б) Процени угаоно одстојање ове планете до Алгибе (γ Leo). Процени угаоно одстојање ове планете до Алфарда (α Hya). Означи ове две звезде на карти и заокружи их. Један подеок висине износи 20°.
   в) Привидна звездана величина ове планете је: в-а) < 0; в-б) између 0 и 1; в-в) између 1 и 2; в-г) > 2.
3. а) Скицирај и осенчи положај Млечног пута на датој карти.
   б) Кроз која сазвежђа се простире на овој карти?
4. На карти се види део још једног сезонског астеризма. Ког? О којима звездама је реч? Уцртај их на карти и означи. Ван карте напиши која звезда припада ком сазвежђу (српски и латински назив сазвежђа).
5. Која је најсјајнија звезда која се види на карти? Да ли је сјајнија од планете из 2. задатка?
   Слике се могу добити на упит.

Решење. 1. а) Денебола (β Leo) – сазвежђе Лава (Leo); Спика (α Vir) – сазвежђе Девице (Virgo); Арктур (α Boo) – сазвежђе Волара (Bootes). б) Береникина коса (Coma Berenices). в) M49, M58, M59, M60, M84, M86, M87, M88, M89, M90, M91, M98, M99 и M100.
2. а) Јупитер. Сатурн је веома ниско, а Венера се не види цела. (велики полукруг у горњем десном углу). б) Пошто су Јупитер и Алгиба практично на истој висини, очитамо на том алмукантару која им је разлика азимута. Да бисмо одатле добили одстојање ρ, потребно је још да одредимо висину алмукантара h и уврстимо их у образац $\sin\rho = \sin\Delta A \cos h$ (изводи се лако из формула датих у списку констаната). Изражена у подеоцима од 20° разлика азимута је $6/14 + 1 + 8/14 = 2$ подеока, тј. $\Delta A = (40 \pm 2)°$. Висина алмукантара је $(3 \pm 2/28) \cdot 20° = (61 \pm 1)°$. Одавде је угаоно одстојање Јупитера од Алгибе $\rho = (18 \pm 2)°$. Висине Јупитера и Алфарда се разликују за $2/28 + 1 + 7/28 = 1{,}32$ подеока, тј. $(26 \pm 1)°$, следи да је висина Алфарда $h_2 = (35 \pm 1)°$. Азимути им се разликују за $8/14 + 1/14 = 0{,}64$, тј. $(12 \pm 2)°$. Применом косинусне теореме налазимо тражено одстојање ρ

$$\cos\rho = \sin h_1 \sin h_2 + \cos h_1 \cos h_2 \cos\Delta A \quad .$$

Одстојање између Јупитера и Алфарда је $\rho = (27 \pm 4)°$. в) Тачан одговор је < 0 (в-а) што се види из величине кружића којим је Јупитер представљен.

3. а) Види карту. б) Једро (Vela), Крма (Puppis), Велики пас (Canis Major), Једнорог (Monoceros), Мали пас (Canis Minor), Орион (Orion) и Близанци (Gemini); на овој карти само кроз мали део Бика (Taurus), али иначе више.

4. Зимски шестоугао. Виде се: Полукс (Близанци, Gemini), Процион (Мали пас, Canis Minor), Сиријус (Велики пас, Canis Major), Ригел (Орион, Orion) и Алдебаран (Бик, Taurus). Недостаје Капела (Кочијаш, Auriga).

5. Најсјајнија звезда на приказаном делу неба је Сиријус (уједно и најсјајнија звезда која се може видети на ноћном небу). Кружић којим је Јупитер приказан на карти је већи – Јупитер је сјајнији од Сиријуса.