РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2013

ТЕОРИЈА

Задаци

1. Враћајући се са тренинга Никола је на прозору своје собе угледао одсјај Сунца. Застао је и запитао се да ли би на основу тог одсјаја могао да одреди колика је висина Сунца у том тренутку. Извршио је неколико мерења и схватио да осим висине Сунца може да израчуна још неке величине. Ево података којима је Никола располагао: зграда гледа на југ; он стоји наспрам зграде на удаљености $l = 30{,}0$ m; прозор његове собе је на висини $H = 10{,}8$ m; прозор се у односу на његов меридијан налази западно на $x = 21{,}0$ m; висина његових очију је $H_0 = 1{,}8$ m и још, Никола станује у Београду ($\lambda = 20°30', \varphi = 44°48'$). Које је вредности Никола добио за висину и азимут Сунца? Колико је сати показивао његов ручни часовник у том тренутку (занемари временско изједначење)? Где би требало да се налази прозор отворен „на кип“ под углом од $i = 10°$ који би давао исти ефект? Да ли је ова ситуација могућа и зашто?

Решење. За затворен прозор може да се одреди положај симетричан Николином у односу на зид те зграде такав да се његова визура подудара са правцем упадног зрака у делу ван зграде. Одатле закључујемо да је азимут Сунца

$$A = \operatorname{arctg} \frac{x}{l} \ .$$

С обзиром на дате вредности и да се меридијан налази западно, резултат је $A = 35°$. Аналогно, код затвореног прозора висина Сунца износи

$$h = \operatorname{arctg} \frac{H - H_0}{\sqrt{x^2 + l^2}} \ .$$

Резултат је $h = 13°48'$. Отварање прозора „на кип“ не утиче на на хоризонталну компоненту визуре, већ само на вертикалну. Према томе, други прозор мора да се налази изнад првог на висини H' таквој да је

$$h' = \operatorname{arctg} \frac{H' - H_0}{\sqrt{x^2 + l^2}} = h + 2i \ .$$

Пошто је i познато, добија се $H' = 26{,}3$ m. Узима се у обзир сферни троугао $\mathrm{P_n}$SZ са теменима у северном небеском полу, Сунцу и зениту, респективно. Примена косинусне теореме даје

$$\cos(90-\delta) = \cos(90-\varphi)\cos(90-h) + \sin(90-\varphi)\sin(90-h)\cos(180-A) \ .$$

Решење за непознату Сунчеву деклинацију је $\delta = -23°20'$. Пошто је $|\delta| < \varepsilon$, ова ситуација је могућа. Часовни угао Сунца t налазимо применом синусне теореме на исти троугао

$$\frac{\sin(90-h)}{\sin t} = \frac{\sin(90-\delta)}{\sin(180-A)} \ .$$

Резултат је $t = 2^h 29^{\mathrm{m}}$. На основу вредности Сунчеве деклинације закључује се да се ово догађа око краткодневице, а тада је на снази зонско време, конкретно средњоевропско време. Часовном углу Сунца одговара месно средње време од $14^h 29^{\mathrm{m}}$, а с обзиром на географску дужину Београда оно је око 22^{m} испред средњоевропског времена, дакле Николин часовник показује $14^h 07^{\mathrm{m}}$.

2. Два астероида су се нашла на најмањем могућем растојању. У поређењу са растојањем до Сунца ово растојање је занемарљиво мало. У тренутку блиског пролаза астероиди прелазе на нове орбите. Њихове хелиоцентричне орбите су елипсе: за први астероид пре блиског пролаза дужина велике полуосе била је 3 ај, а после 3,5 ај, код другог пре блиског пролаза дужина велике полуосе је 2,4 ај, а после 2,2 ај.
   а) Ако је маса првог $\mathfrak{m}_1$, а другог $\mathfrak{m}_2$, чему је онда једнак однос $\mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_2$?
   б) Ако је њихово хелиоцентрично растојање у тренутку блиског пролаза било једнако највећем могућем растојању помноженом са 0,6, чему су онда једнаке интензивности вектора брзине у односу на Сунце за оба астероида, пре и после блиског пролаза?

Решење. Примењује се закон о одржању енергије. Вредност збира механичких енергија хелиоцентричног кретања се не мења. За било који од два астероида израз за укупну механичку енергију гласи

$$W_i = \mathfrak{m}_i\left(\frac{1}{2}V_i^{\ 2} - \frac{G\mathfrak{M}}{r}\right) ,$$

где је: $\mathfrak{m}_i$ - маса једног од астероида, V_i - његова хелиоцентрична брзина, r – тренутно хелиоцентрично растојање, $\mathfrak{M}$ - маса Сунца и G универзална константа гравитације ($i = 1{,}2$). Збир ових енергија за први и други астероид за ситуацију пре блиског пролаза се изједначава са оним за ситуацију после пролаза. Пошто се све ово догађа тренутно, потенцијалне енергије се не мењају (хелиоцентрично растојање је све време исто). Квадрат брзине и дужина велике полуосе за било који од астероида повезани су на следећи начин

$$V_i{}^2 = \frac{2G\mathfrak{M}}{r} - \frac{G\mathfrak{M}}{a_i} \ ,$$

где је a_i дужина велике полуосе. Решавање тече на следећи начин

$$\frac{1}{2}\left(\mathfrak{m}_1 V_{1b}{}^2 + \mathfrak{m}_2 V_{2b}{}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{m}_1 V_{1a}{}^2 + \mathfrak{m}_2 V_{2a}{}^2\right) ,$$

$$\mathfrak{m}_1\left(V_{1b}{}^2 - V_{1a}{}^2\right) = \mathfrak{m}_2\left(V_{2a}{}^2 - V_{2b}{}^2\right) ,$$

$$\mathfrak{m}_1\left(\frac{2G\mathfrak{M}}{r} - \frac{G\mathfrak{M}}{a_{1b}} - \frac{2G\mathfrak{M}}{r} + \frac{G\mathfrak{M}}{a_{1a}}\right) = \mathfrak{m}_2\left(\frac{2G\mathfrak{M}}{r} - \frac{G\mathfrak{M}}{a_{2a}} - \frac{2G\mathfrak{M}}{r} + \frac{G\mathfrak{M}}{a_{2b}}\right) \ .$$

Из последњег израза следи

$$\frac{\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_2} = \frac{a_{2a}{}^{-1} - a_{2b}{}^{-1}}{a_{1b}{}^{-1} - a_{1a}{}^{-1}} \ \ .$$

Индекси a и b, који се овде срећу, указују на ситуације, први се односи на после пролаза (енгл. *after*), а други на пре пролаза (енгл. *before*). Заменом горе датих вредности налазимо да је тражени однос маса $\mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_2$ једнак 0,795.

Да би се дао одговор под б) треба одредити хелиоцентрично растојање r на коме се догодио блиски пролаз. Према датим подацима пре блиског пролаза дужина велике полуосе за други астероид била је краћа. Према томе, одговарајуће растојање од Сунца у афелу је највеће могуће хелиоцентрично растојање где блиски пролаз може да се догоди. Ексцентричности орбита нису дате, али пошто су у питању везана стања, оне не могу бити веће од 1. Следи да је највеће могуће растојање од Сунца где може да се догоди блиски пролаз једнако 4,8 ај. Када се оно помножи са 0,6, добија се 2,9 ај. Сада је лако одредити тражене вредности брзине (израз $V_i{}^2 = \cdots$). Решења гласе: $V_{1b} = 18{,}2\ \mathrm{km\ s^{-1}}$, $V_{1a} = 19{,}4\ \mathrm{km\ s^{-1}}$; $V_{2b} = 15{,}9\ \mathrm{km\ s^{-1}}$, $V_{2a} = 14{,}8\ \mathrm{km\ s^{-1}}$.

3. Један пулсар у близини еклиптике масе два пута веће од Сунчеве емитује импулсе са периодом од 1 s. Међутим, прецизна мерења су показала да период овог пулсара није сасвим константан, него да се мења током године са амплитудом од 10^{-8} s. Колику би масу требало да има тело које се креће око пулсара по кружној путањи да би изазвало овакву промену?

Решење. Пулсар и његов сателит се крећу по кружним путањама око центра маса са периодом T. Масу пулсара означимо са $\mathfrak{M}$, његову брзину у односу на центар маса са V, а полупречник одговарајуће путање са R. Аналогне величине за сателит означимо са $\mathfrak{m}$, v и r, респективно. Брзину пулсара можемо да одредимо пошто знамо период његовог емитовања и амплитуду промене користећи *релативистички* [1] Доплеров ефект

$$V = c\frac{\Delta P}{P} \ .$$

(c је брзина светлости); добија се $V = 3 \mathrm{~m~s}^{-1}$. Визура је у равни орбите. Период промене ΔP износи годину дана, а он је једнак периоду обиласка T. Векторски збир количине кретања у односу на центар маса једнак је нули, те одатле следи

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{M}V}{v} \ . \quad (1)$$

До истог закључка се може доћи и због тога што је збир вектора положаја у односу на центар маса једнак нули, као зато што је период обиласка исти и за пулсар и за сателит. Брзина кретања сателита по кружној путањи око центра маса дата је изразом

$$v = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{eq}}{r}} \ . \ (2)$$

Овде је $\mathfrak{M}_{eq}$ тзв. еквивалентна маса за орбиту сателита, $\mathfrak{M}_{eq} = \mathfrak{M}^3/(\mathfrak{M}+\mathfrak{m})^2$; усвојимо $\mathfrak{M}+\mathfrak{m} \approx \mathfrak{M}$. Осим тога, с обзиром да за период обиласка T важи

$$T = \frac{2\pi r}{v} \ ,$$

може се за брзину v коначно написати

[1] Још га зову и Доплеров ефект другог реда јер се узима у обзир и дилатација времена.

$$v = \sqrt[3]{2\pi G \frac{\mathfrak{M}}{T}} \;\; .$$

Имајући у виду једначину (1) за масу сателита се добија следећи израз

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{M} V \left(2\pi G \frac{\mathfrak{M}}{T}\right)^{-1/3} \;\; .$$

Све потребне вредности су познате, следи $\mathfrak{m} = 3{,}2 \times 10^{26}$kg, око 53 Земљине масе.

Напомена. Формула (2) примењена на пулсар доводи до истог резултата за масу сателита јер је

$$V^3 = \frac{2\pi G}{T} \frac{\mathfrak{m}^3}{\mathfrak{M}^2} \;\; .$$

Поново се користи $\mathfrak{M} + \mathfrak{m} \approx \mathfrak{M}$.

4. Вулканци, интелигентни становници екстрасоларне планете Вулкан, снимају криву сјаја Сунца. Проценити дубину минимума који се јавља када Јупитер зађе за Сунчев диск. Колико траје овај минимум? Сматрај да се Сунце, Јупитер и Вулкан налазе у истој равни, да је Јупитерова орбита кружна, као и да рефлексија Сунчеве светлости од Јупитерове атмосфере доприноси кривој сјаја. Дужина велике полуосе за Јупитерову путању је $a = 5{,}204$ ај, албедо $A = 0{,}52$, а његов полупречник $R = 69.911$ km.

Решење. Крива сјаја Сунца ће имати максимум непосредно пред залазак Јупитера за Сунчев диск (1. контакт), као и оног тренутка када Јупитер у потпуности изађе код Сунчевог диска (4. контакт). Ово повећање сјаја је последица рефлексије Сунчеве светлости од Јупитерове атмосфере. За време трајања минимума криве сјаја, када се Јупитер својим целим диском налази иза Сунца (време између 2. и 3. контакта), Вулканци детектују осветљеност која потиче само од Сунца - $E_{\odot}$, а непосредно пре (и после) минимума допринос кривој сјаја даје и осветљеност рефлектована од Јупитерове атмосфере - $E = E_{\odot} + E_J$. Дубина минимума је управо осветљеност коју даје Сунчева светлост рефлектована од Јупитерове атмосфере - E_J. За осветљеност коју даје Сунце имамо

$$E_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \;\; ,$$

а флукс који Јупитер прима од Сунца је

$$\Phi = \frac{L_\odot}{4\pi a^2}\pi R^2 \ .$$

Ефективна осветљена површина Јупитера која се види са Вулкана (пројекција осветљене површи на раван попречног пресека) је

$$S_{ef} = \frac{1}{2}\pi R^2 \left[1 + \cos\left(\mathrm{arctg}\frac{R_\odot + R}{a}\right)\right].$$

Пошто је $R_\odot + R \ll a$, косинус угла је приближно једнак 1, па је $S_{ef} \approx \pi R^2$. Осветљеност коју Вулканци детектују са Јупитера је

$$E_J = \frac{S_{ef}}{\pi R^2}\frac{A\Phi}{2\pi r^2} \approx \frac{A L_\odot R^2}{8\pi a^2 r^2} \ .$$

Тражена дубина минимума за криву сјаја Сунца фигурише у Погсоновој формули

$$\Delta m = 2{,}5 \log\frac{E_J + E_\odot}{E_\odot}.$$

С обзиром на добијене изразе за осветљености биће

$$\Delta m = 2{,}5 \log\left(1 + \frac{AR^2}{2a^2}\right) \ .$$

Пошто је други сабирак у загради много мањи од 1, може се употребити приближна формула: $\log(1 + x) \approx x/\ln 10$, те је $\Delta m = 2{,}26 \times 10^{-9}$.

Дужина трајања минимума је време које прође између 2. и 3. контакта. За то време Јупитер на својој орбити пређе угао

$$\theta = 2\mathrm{arcsin}\frac{R_\odot - R}{a} \ ,$$

који је једнак 5’30,02” (Сунчев полупречник видети у константама). Јупитеров период обиласка P се одређује из трећег Кеплеровог закона, тј. $P = 5{,}204^{3/2}$ =11,87 година или 4336 дана. Протекло време τ је

$$\tau = \frac{\theta}{360} \ P \ .$$

Резултат је τ =1,104 дана.

5. Дата је Фридманова једначина која описује Васиону

$$\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - k\left(\frac{c}{R}\right)^2 \ ,$$

где је: R полупречник кривине Васионе, V брзина његове промене, ρ густина Васионе, док су π, c и G универзалне константе – Лудолфов број, брзина светлости и константа гравитације, респективно. Нека је геометрија Васионе Риманова што значи да је параметар k једнак 1. Колико би у овим условима износила густина Васионе за садашњу епоху ако је $V = 70.000\ \mathrm{km\ s^{-1}}$? Васиона је хомогена и изотропна.

Решење. Хомогеност и изотропност значе да је густина свугде иста, а такође и однос V/R. Обе ове величине се мењају само са временом. За садашњу епоху (Хаблово време, око 14 милијарди година после великог праска) важи: $V/R = H$, где је H Хаблова константа. Њена вредност је позната (вид. константе) и следи $R = 1\ \mathrm{Gpc}$. Количник брзине светлости и ове величине је 300 km $\mathrm{s^{-1}Mpc^{-1}}$. Збир квадрата ове величине и квадрата Хаблове константе је 94.900 $\mathrm{km^2 s^{-2} Mpc^{-2}}$. Густина би била $2{,}5 \times 10^{-6}\ \mathfrak{M}_\odot \mathrm{pc^{-3}}$ (око $2 \times 10^{-25}\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$).

ОБРАДА ПОДАТАКА

1. У таблици су дати подаци за неке објекте Сунчевог система. Провери III Кеплеров закон графичким методом. Користећи резултат који си добио рачунски одреди дужину велике полуосе транснептунског објекта Седна чији је период обиласка око Сунца 11.400 година.

Објект	период (год.)	велика полуоса (ај)
Меркур	0,241	0,387
Венера	0,615	0,723
Земља	1,000	1,000
Марс	1,881	1,524
Јупитер	11,862	5,203
Сатурн	29,458	9,539

Уран	84,014	19,191
Нептун	164,793	30,061
Плутон	247,700	39,529
Ерис	590,900	68,010

Решење. Због разлике у реду величине најцелисходније је да се употребе логаритми, дакле за апсцису $\log P$ (P период) и за ординату $\log a$ (a велика полуоса). Тачка у координатном почетку односиће се на Земљу. Добија се права линија која, разуме се, пролази кроз координатни почетак. За тачке на графику апсолутне вредности не прелазе 2,8 на апсциси, 1,8 на ординати. Узимајући произвољну тачку на правој која не мора да буде једна од улазних можемо да образујемо правоугли троугао чије су катете једнаке координатама изабране тачке, а хипотенуза је дуж која спаја тачку са координатним почетком. Коефицијент правца налазимо као тангенс угла код координатног почетка. На пр. тачка чија је апсциса једнака 1, а ордината 0,67. Ово одговара коефицијенту правца од око $2/3$, што и јест трећи Кеплеров закон. За период Седне важи $\log P = 4{,}0569$, те следи да је њена велика полуоса дугачка око 507 ај.

2. Таблица садржи податке за разне спектралне класе звезда главног низа. Одреди јачину гравитационог поља у фотосфери за сваку од датих класа звезда користећи јачину гравитационог поља у фотосфери Сунца као јединицу. Јачину гравитационог поља прикажи графички у зависности од спектралне класе. Изведи закључке из добијеног графика. Користећи график и изведене закључке, процени масу за спектралну класу А8 за коју ефективна температуре износи 7580 К, а луминозност 8,6 Сунчевих луминозности.

Класа	T_{eff} [K]	$L\ [L_{\odot}]$	$\mathfrak{M}\ [\mathfrak{M}_{\odot}]$
O3	52.500	$1{,}4 \times 10^{6}$	120
O5	44.500	$7{,}9 \times 10^{5}$	60
O6	41.000	$4{,}2 \times 10^{5}$	37
B0	30.000	$5{,}2 \times 10^{4}$	17,5
B8	11.900	$1{,}8 \times 10^{2}$	3,8
A0	9520	54	2,9
F0	7200	6,5	1,6
G0	6030	1,5	1,05
K0	5250	0,42	0,79
K5	4350	0,15	0,67
M0	3850	$7{,}7 \times 10^{-2}$	0,51
M5	3240	$1{,}1 \times 10^{-2}$	0,21
M8	2640	$1{,}2 \times 10^{-3}$	0,06

Решење. Јачину гравитационог поља, величину коју треба да одредимо означићемо са g. Она се одређује за фотосферу. Занемарујући дебљину фотосфере можемо написати

$$g = \frac{G\mathfrak{M}}{R^2}\ .$$

Нове ознаке су: G за константу гравитације и R за полупречник звезде. Из дате формуле следи да је јачина овог поља изражена преко истог за Сунце дата као

$$\frac{g}{g_{\odot}} = \frac{\frac{G\mathfrak{M}}{R^2}}{\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{{R_{\odot}}^2}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{\odot}}\left(\frac{R_{\odot}}{R}\right)^2\ .$$

Масе звезда изражене у масама Сунца су већ дате у таблици, дакле треба наћи однос полупречника. Пошто су у таблици дате ефективне температуре и луминозности, можемо одредити полупречнике. Познато је

$$L = 4\pi\sigma R^2 {T_{eff}}^4\ ,$$

где је σ Штефан-Болцманова константа. Следи да је луминозност пропорционална производу $R^2{T_{eff}}^4$. Пошто у списку констананата нема податка за ефективну температуру Сунца, а има за луминозност, најпре ћемо израчунати његову ефективну температуру.

Резултат је 5772 K. Сада можемо да израчунамо однос полупречника за сваку класу. Образоваћемо нову таблицу потребну за цртање графика.

Класа	$\mathfrak{M}$ [$\mathfrak{M}_\odot$]	R [$R_\odot$]	g [$g_\odot$]
O3	120	14,3	0,59
O5	60	14,95	0,27
O6	37	12,84	0,22
B0	17,5	8,44	0,25
B8	3,8	3,16	0,38
A0	2,9	2,7	0,40
F0	1,6	1,64	0,64
G0	1,05	1,12	1,02
K0	0,79	0,78	1,30
K5	0,67	0,68	1,45
M0	0,51	0,62	1,33
M5	0,21	0,33	1,93
M8	0,06	0,17	2,08

График обухвата само један квадрант. На апсциси, по традицији, спектралне класе иду од O ка M. Пошто свака класа има 10 подкласа, све ће имати једнаке одсечке на апсциси. С обзиром на то да подаци почињу са O3 и завршавају се са M8, биће укупно 66 подкласа. За ординату треба узети у обзир да је највећа вредност око 2,1, а може се почети са нулом. Добија се крива линија која није сасвим монотона – има један минимум на прелазу из класе O у B и један максимум на средини класе K. Ове екстремне вредности су, несумњиво, последица немогућности усаглашавања свих табличних података, а треба имати у виду и грешке настале као последица заокругљивања. Зависност g од спектралне класе треба да буде монотона функција, и то растућа (смер од O ка M), као што и полупречник R треба да опада у том смеру. Другим речима, јачина поља гравитације се понаша супротно маси и полупречнику, који су монотоно опадајуће функције. У случају звезде подкласе A8 из датих података налазимо да је $R = 1{,}7\ R_\odot$ (слаже се са горњом таблицом). Према графику било би $g = 0{,}6\ g_\odot$. Одговарајућа маса је 1,73 $\mathfrak{M}_\odot$, што се такође добро уклапа у очекиване вредности.

ПОСМАТРАЊЕ

1. На звезданој карти датој у хоризонтском систему обележи положај тачке пролећне равнодневице. Напиши приближне вредности њених хоризонтских координата. Звездана карта приказује део неба над Београдом 1. јуна 2013. године у 20 часова по светском времену (на карти је уписано летње време). Са карте је уклоњено тло које заклања небо под хоризонтом. Азимут на карти (A_A) је дат по англо-саксонском систему; трансформација на наш (A) се врши по формули: $A = A_A + 180°$. Тачке запада, севера и истока на хоризонту означене су ћириличним словима „З“, „С“ и „И“, тим редом.
   Помоћ: Месечева (еклиптичка) латитуда је око $4°$.

Решење. Тачка пролећне равнодневице (даље γ —тачка) се налази у пресеку небеског екватора и еклиптике. Прво ћемо скицирати небески екватор и за то су нам потребне најмање три тачке. На карти су обележене две од њих: источна тачка ($A_A = 90°$, $h = 0°$) и западна тачка ($A_A = 270°$, $h = 0°$). Трећа тачка коју треба уцртати је северна тачка на екватору која има исти азимут као и северна тачка на хоризонту (на карти означена словом „С“), а чија је висина једнака $-(90 - \varphi)$. Северна тачка на екватору мора бити испод хоризонта јер гледамо северну страну неба. Еклиптику приближно провлачимо кроз планете, Сунце и $4°$ ниже од Месеца. Сада треба прочитати са карте хоризонтске координате пресека и трансформисати азимут на наш начин рачунања. Тачне вредности хоризонтских координата γ —тачке су: $A = 220°$, $h = -37°$.