РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2012

ТЕОРИЈА

Задаци

1. Замисли да се у неком „не-научнофантастичном“ филму Сунце тренутно претвори у црну рупу огромне масе. Ако, сем овог бизарног догађаја, ипак важе закони физике, колика би морала бити маса те црне рупе да би Земља могла да прође кроз хоризонт догађаја (Шварцшилдов полупречник црне рупе)? Ексцентричност Земљине путање око Сунца се занемарује.

Решење. У оба случаја, и када се Земља креће око Сунца и око црне рупе, потенцијал гравитације има исти облик

$$\Pi = \frac{G\mathfrak{M}}{r} \ ,$$

где је G константа гравитације, $\mathfrak{M}$ маса извора поља (Сунца или црне рупе) и r растојање између извора и (у овом случају) Земље. Тада важе закони одржања енергије и момента количине кретања. Међутим, у случају енергије њене вредности за стање пре настанака црне рупе (када је извор Сунце) и за ново стање (извор црна рупа) нису једнаке, јер је одржање енергије последица стационарности потенцијала (у овом случају непромењива маса). За разлику од енергије момент количине кретања се преноси из првог стања у друго, јер је његово одржање последица сферне симетрије (потенцијал зависи само од растојања, тј.правац нема никакав утицај).

Квадрат интензивности вектора специфичног (по јединици масе) момента количине кретања изразићемо преко дужине велике полуосе и ексцентричности орбите. Тада важи

$$aG\mathfrak{M}_\odot = \frac{G\kappa\mathfrak{M}_\odot}{a'}(1-e^2)a'^2 \ \ . \ (1)$$

Ознаке: $\mathfrak{M}_\odot$ - маса Сунца, κ - однос масе црне рупе и масе Сунца, a - дужина велике полуосе старе орбите (око Сунца), a' - исто за нову орбиту и e - ексцентричност нове орбите, при чему се има у виду да се стара сматра кружном. Најпре треба скратити производ $G\mathfrak{M}_\odot$, а затим узети у обзир за екстремна растојања нове орбите: $r_a = a'(1+e)$, $r_p = a'(1-e)$. Тако израз (1) постаје

$$a = \frac{\kappa}{a'} r_a r_p \quad . \ (2)$$

Прелазак из Сунца у црну рупу догађа се тренутно. Стога се брзина којом се Земља креће не мења ни по интензивности ни по правцу, а због кружног кретања око Сунца њен вектор иде дуж тангенте на ту кружницу у тачки где се налази Земља. Маса црне рупе је „огромна“, тј. $\kappa > 1$. Као последица, кружна брзина за ново стање на растојању $r = a$ је већа од брзине којом се Земља креће, те следи $r_a = a$. С друге стране, Земља треба прође кроз хоризонт догађаја, следи да је њено најмање растојање Шварцшилдовом полупречнику, тј.

$$r_p = \frac{2G\kappa\mathfrak{M}_\odot}{c^2} = \kappa R \quad .$$

Овде је c брзина светлости, а пошто је Шварцшилдов полупречник пропорционалан маси, уводи се величина R, Шварцшилдов полупречник за Сунце. Тако сада израз (2) добија облик

$$a' = \kappa^2 R \quad .$$

С друге стране,пошто је дужина велике полуосе једнака аритметичкој средини између r_a и r_p , добијамо квадратну једначину по κ

$$2R\kappa^2 - R\kappa - a = 0 \quad .$$

Разуме се, једино решење код кога је $\kappa > 0$ има физички смисао. Вредности за a и R су познате и зато се зна да је $a/R = 5 \times 10^7$. Следи да је $\kappa \approx 5000$.

До истог резултата се долази и применом одржања специфичне енергије за новонастало стање, тј.

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{G\kappa\mathfrak{M}_\odot}{a} = -\frac{G\kappa\mathfrak{M}_\odot}{2a'} \quad ,$$

где је v брзина кретања Земље око Сунца, $v = \sqrt{G\mathfrak{M}_\odot/a}$. Због тога што је за нову орбиту $r_a \gg r_p$ (10^4 пута веће), $a' \approx (1/2)a$.

2. Под претпоставком да шум при фотометријским посматрањима расте са квадратним кореном из броја фотона, колико дуго треба посматрати звезду чија је привидна величина $m = 9$ телескопом пречника 1 m да бисмо остварили фотометријску прецизност од 0,1%. Претпоставити да звезда зрачи фотоне „средње“ таласне дужине једнаке 550 nm.

Решење. Фотометријска прецизност од 0,1% значи да је шум 1000 пута мањи од сигнала, а како је $10^3 = \sqrt{10^6}$, следи да има $N = 10^6$ фотона. Њихов број по јединици површине у јединици времена η дат је изразом

$$\eta = \frac{N}{\Delta t \Delta S} \ ,$$

где је Δt тражени временски размак; површина ΔS одговара кругу чији је пречник једнак пречнику телескопа. Алтернативно η можемо одредити као количник енергија E која од звезде са $m = 9$ доспева по јединици површине у јединици времена и енергије фотона за дату „средњу“ таласну дужину, а она је дата као hc/λ (h - Планкова константа, c - брзина светлости и λ - таласна дужина). За одређивање величине E користи се поређење са Сунцем. Зна се да је таква величина за Сунце $\mathrm{E}_{\odot}$ дата као

$$\mathrm{E}_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a^2} \ .$$

Потребне величине луминозност и растојање Сунца од Земље (a) су познате, као и привидна величина Сунца. Тако применом познате формуле

$$\log \frac{E}{\mathrm{E}_{\odot}} = 0{,}4\Delta m$$

налазимо $E = 6{,}5 \times 10^{-12}\ \mathrm{W\ m^{-2}}$ и како је енергија фотона $W_f = 3{,}61 \times 10^{-19}$ J, добија се $\eta = 1{,}8 \times 10^{7}\ \mathrm{s^{-1} m^{-2}}$. Површину и број фотона знамо,према томе је $\Delta t = 0{,}07$ s. Овако кратко време не треба да чуди јер сјај није мали (привидна величина $m = 9$), а и телескоп није мали.

3. Човек на Земљи лако скочи до висине од 50 cm.
   А) Колико би такав човек скочио на Месецу?
   Б) Замислимо да је маса човека упоредива са масом Месеца. Шта ће се десити у тренутку када човек скочи?
   В) Да ли би догађај под Б) могао да утиче орбиту Месеца?

Решење. Из висине скока на Земљи можемо израчунати кинетичку енергију скока, односно почетну брзину

$$W_k = \frac{1}{2} m {v_0}^2 = mgh \ \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} \ .$$

Висина до које ће човек скочити на Месецу биће једнака разлици висина у којима му је кинетичка енергија максимална и минимална (нула), што одговара положајима у којима је човекова потенцијална енергија минимална и максимална

$$W_{pmin} = -G\,\frac{m\mathfrak{M}_m}{R_m} \quad ; \quad W_{pmax} = -G\,\frac{m\mathfrak{M}_m}{R_m + h_m} \quad .$$

Ознаке: m, као и раније, маса човека, $\mathfrak{M}_m$ маса Месеца, R_m полупречник Месеца, h_m висина изнад Месечеве површи и G константа гравитације. Користећи закон о одржању енергије добијамо одговор на питање А)

$$\frac{m{v_0}^2}{2} - G\,\frac{m\mathfrak{M}_m}{R_m} = -G\,\frac{m\mathfrak{M}_m}{R_m + h_m} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\; h_m = \frac{{v_0}^2{R_m}^2}{2G\mathfrak{M}_m - {v_0}^2 R_m} \quad .$$

Б) Ако су масе човека и Месеца упоредиве, онда количина кретања коју човек предаје Месецу неће бити занемарљива, па ће Месец у супротном смеру добити брзину v_m

$$v_m = \frac{m}{\mathfrak{M}_m}\,v_0 \quad .$$

В) Овај догађај може да утиче на орбиту Месеца само ако је промена довољно велика да иста постане отворена (парабола, тј. хипербола) тако да Месец може да напусти систем Земља-Месец. Такође, ако Месечева орбита остане елипса, али због повећања ексцентричности Месец може да удари о Земљу, или пак, човек напусти гравитационо поље Месеца. Уколико ниједан од ових услова није испуњен, центар маса система човек-Месец ће наставити да се креће по елипси око Земље, па ће након човековог „пада“ на Месечеву површ све бити исто као и пре његовог скока, а енергија скока ће се претворити у топлотну енергију.

4. Бели патуљак дате масе и полупречника акретује масу константном познатом стопом из акреционог диска полупречника R (који је много већи од полупречника саме звезде) и занемарљиве дебљине. Ако овакав систем подједнако зрачи у видљивом домену, услед термалне емисије диска, и у X домену, услед удара материје о белог патуљка, написати изразе за емисивност у ова два домена и упоредити их.

Решење. Целокупна енергија зрачења потиче од смањења потенцијалне енергије честица које се крећу од ивице диска до површи белог патуљка. Половина те енергије се израчи у видљивом домену са површи диска, а друга половина са површи белог патуљка у X домену. Нека је укупна израчена енергија у јединици времена

$$\frac{\Delta W_p}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(-G\,\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{M}}{2R} + G\,\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{M}}{R_0}\right)}{\Delta t} \quad .$$

Са $\mathfrak{m}$ је означена маса честице, са $\mathfrak{M}$ маса белог патуљка, док је R_0 полупречник белог патуљка, а G константа гравитације. Пошто је последњи полупречник много мањи од полупречника диска R, за луминозности L_L и L_X у видљивом и X домену, респективно, се може написати

$$L_X = L_L = \frac{1}{2}\frac{\Delta W_p}{\Delta t} = G\,\frac{\Delta\mathfrak{m}}{\Delta t}\frac{\mathfrak{M}}{2R_0} = G\mu\,\frac{\mathfrak{M}}{2R_0} \ .$$

Зрачење са диска се догађа са целе површи, али због занемаривања дебљине, узеће се да је површина једнака збиру површина горње и доње основе. Зрачење са белог патуљка се догађа са половине његове фотосфере. Следи за емисивност (луминозност по јединици површине) за X домен

$$\sigma_X = \frac{L_X}{2\pi {R_0}^2} = G\mu\,\frac{\mathfrak{M}}{4\pi {R_0}^3} \quad ;$$

за видљиви домен

$$\sigma_L = \frac{L_L}{2\pi R^2} = G\mu\,\frac{\mathfrak{M}}{4\pi R_0 R^2} \ .$$

Закључак је да, премда су луминозности једнаке, емисивност у X домену је далеко већа, јер је $R \gg R_0$.

5. Разлика привидних величина за две сличне галаксије које се налазе на истом правцу је $\Delta m =$7. Посматрач који би са једне од те две галаксије посматрао ону другу, установио би да се линија H_γ (таласна дужина $\lambda_\gamma = 434$ nm) налази на месту линије H_β (таласна дужина $\lambda_\beta = 486$ nm) . Наћи хелиоцентрична растојања ових галаксија.

Решење. Сличност галаксија се схвата као једнакост апсолутних величина, $M_1 = M_2$, где се индекс 1 односи на ближу галаксију. На основу познате формуле

$$m = M + 5\log s - 5 \ ,$$

налазимо да је

$$5\log\frac{s_2}{s_1} = 7 \ \ ,$$

што значи да је $s_2/s_1 = 25$. Околност да су ове две галаксије на истом правцу значи $r = s_2 - s_1$, где је r њихово међусобно растојање. Њега налазимо преко одговарајућег црвеног помака z, $z = \Delta\lambda/\lambda$. У овом случају је $\Delta\lambda = \lambda_\beta - \lambda_\gamma = 52$ nm и $\lambda = \lambda_\gamma$. Затим се примењује Хаблов закон у облику

$$c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = Hr \ \ ;$$

c је брзина светлости, а H Хаблова константа. Пошто су све величине познате, налазимо $r = 513{,}5$ Mpc. Систем од две једначине са две непознате

$$\frac{s_2}{s_1} = 25 \ \ ,$$

$$s_2 - s_1 = r \ \ \ ,$$

има решења $s_1 = 21{,}4$ Mpc, $s_2 = 534{,}9$ Mpc.

Напомена. Ако се радијална брзина једне галаксије за посматрача на другој рачуна преко тачније (релативистичке) формуле, добија се нешто другачији резултат. Израз је

$$1 + z = \sqrt{\frac{1+\chi}{1-\chi}} \ ,$$

где је χ однос радијалне брзине и брзине светлости; већ знамо $z = 52/434 = 0{,}1198$. Следи $\chi = 0{,}1127$, тј. $v_{rad} = 33.800 \ \mathrm{km\ s^{-1}}$. Дељење ове вредности Хабловом константом даје $r = 482{,}9$ Mpc, а онда је $s_1 = 20{,}1$ Mpc, $s_2 = 503$ Mpc.