РЕГИОНАЛНО ТАКМИЧЕЊЕ 2022

I Питања

1. Осим што се разликују по промењљивости својих координата (на пр. небеских екваторских) звезде и планете на небу можемо разликовати и према њиховом светљењу. Наведи појаву и врло кратко опиши њен узрок.

Одговор. Реч је о појави сцинтилације или треперења, карактеристичној само за звезде. Она је последица астрономске рефракције, појаве у чијој је основи постојање Земљине атмосфере и околности да су звезде много даље од планета, те су стога њихови привидни или угаони пречници занемарљиви. Оне су тачкасти извори светлости за разлику од планета, које су распрострти извори.

2. У случају да се маса тела око кога сателит обилази тренутно промени, из стања 1 (пре промене масе) у стање 2 (после промене) преноси се:
   а) енергија и момент количине кретања (импулса) сателита;
   б) само енергија;
   в) само момент количине кретања;
   г) ниједно ни друго.
   Заокружи само један одговор.

Одговор. в).

3. Избаци уљеза: Нептун, Уран, Венера, Земља, Марс. Образложи свој одговор.

Одговор. Венера. Нема ниједан природни сателит.

II Задаци

1. Сиријус, чија је деклинација $\delta = -16°42'58"$, је најсјајнија звезда на земаљском небу. Када се он у Београду ($\lambda = 20°30'$, позитивна дужина значи исток) налази у горњој кулминацији, у месту X залази. Познато је да се горња кулминација Сиријуса у месту X догађа на јужној небеској хемисфери на висини $h_X = 40°$. Одреди географске координате места X.

Решење. Најпре налазимо географску дужину места X, λ_X. Њу одређујемо из следеће пропорције

$$\frac{\Delta\lambda}{360} = \frac{\Delta s}{24}.$$

Ознаке $\Delta\lambda$ и Δs представљају разлике географских дужина и звезданих времена, респективно. Пошто је Сиријус у Београду у горњој кулминацији, звездано време је једнако његовој ректасцензији, с обзиром на то да је часовни угао тада једнак нули. Помоћу формула сферне тригонометрије (Гаусови обрасци, вид. константе), примењујући их на сферни троугао $\mathrm{P_n Z\Sigma}$ - $\mathrm{P_n}$ северни небески пол, Z зенит и Σ небеско тело – долазимо до формула за прелаз из хоризонтског у месни екваторски координатни систем; хоризонтске координате азимут A и висина h, месне екваторске координате часовни угао t и деклинација δ.

$$\sin\delta = \sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cos h\cos A\ ,$$

$$\cos\delta\sin t = \cos h\sin A\ ,$$

$$\cos\delta\cos t = \cos\varphi\sin h + \sin\varphi\cos h\cos A\ \ ;$$

где је φ географска ширина. Када је неко небеско тело у горњој кулминацији, и то на јужној небеској хемисфери, онда за његов азимут важи: $A = 0$. Тада из горње формуле (синус деклинације) следи

$$\delta = h - (90 - \varphi)\ .$$

Вредности за висину и деклинацију су познате, те је $\varphi_X = 33°17'2"$. Ово је једино решење јер је речено да се горња кулминација Сиријуса догађа на јужној хемисфери. Да би се одредило звездано време s_X потребан је часовни угао Сиријуса у месту X. Примењују се Гаусови обрасци за $\sin\delta$ и $\cos\delta\cos t$. Дељењем првог са другим уз напомену да је $h = 0$ (залаз) добија се

$$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta\ \ .$$

Резултат је $t = 5^{\mathrm{h}}14^{\mathrm{m}}31^{\mathrm{s}}$. Одговарајуће звездано време је онда једнако збиру ове вредности и ректасцензије. Следи да је разлика звезданих времена једнака разлици часовних углова, тј. $\Delta s = 5^{\mathrm{h}}14^{\mathrm{m}}31^{\mathrm{s}}$. Заменом ове вредности у пропорцију, с обзиром на то да је географска дужина Београда дата, следи $\lambda_X = 99°7'46"$. Место X мора бити источније од Београда јер Сиријус онде залази, а у Београду је у горњој кулминацији, с обзиром на Земљину хемисферу и смер њеног обртања.

2. Очекује се да ће једног дана човечанство да постави летелицу у орбиту око сателита неке од џиновских планета Сунчевог система. Изведи образац за критично растојање (полупречник Хилове сфере r_H) летелице од сателита, знајући да под претпоставком да сателит обилази око планете по кружници троструки квадрат његове угаоне брзине треба да буде једнак квадрату угаоне брзине за обилажење око сателита, такође по кружници. У случају да је планета Јупитер ($\mathfrak{M}_J = 317{,}4\ \mathfrak{M}_\oplus$, $\oplus$ - знак за Земљу) , а сателит Европа ($\mathfrak{M}_E = 0{,}65\ \mathfrak{M}_M$, $\mathfrak{M}_M$ - маса Месеца) чији је полупречник орбите $\mathfrak{R} = 670.900$ km, колики је полупречник Хилове сфере? Да ли је могуће безбедно обилажење летелице око Европе, с обзиром на њен полупречник од 1560 km и занемарљиву атмосферу? Одговори са ДА или НЕ и дај кратко образложење.

Решење. Угаона брзина сателита неке планете чија је орбита кружна је константна и дата изразом

$$\omega_S = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{Pl}}{\mathfrak{R}^3}},$$

где је G константа гравитације, $\mathfrak{M}_{Pl}$ маса планете и $\mathfrak{R}$ полупречник орбите. Угаона брзина летелице која на константном растојању r обилази око сателита масе $\mathfrak{M}_S$ дата је изразом

$$\omega_{pr} = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_S}{r^3}} \ .$$

Према реченом у поставци ако је $r = r_H$, онда је $3{\omega_S}^2 = {\omega_{pr}}^2$. Следи

$$\frac{3G\mathfrak{M}_{Pl}}{\mathfrak{R}^3} = \frac{G\mathfrak{M}_S}{{r_H}^3} \Rightarrow \left(\frac{r_H}{\mathfrak{R}}\right)^3 = \frac{1}{3}\frac{\mathfrak{M}_S}{\mathfrak{M}_{Pl}} \ .$$

У траженом случају је $\mathfrak{M}_{Pl} = \mathfrak{M}_J$, $\mathfrak{M}_S = \mathfrak{M}_E$. Користећи константе можемо обе масе изразити у kg; биће $\mathfrak{M}_J = 1{,}9 \times 10^{27}$ kg, $\mathfrak{M}_E = 4{,}8 \times 10^{22}$ kg. Пошто је полупречник орбите познат, резултат је $r_H = 13.650$ km. Одговор је ДА, јер је полупречник Хилове сфере око девет пута већи од полупречника Европе, а њена атмосфера се занемарује.

3. Двојна звезда се састоји од два бела патуљка. Њихове болометријске привидне величине се разликују за $\Delta m_{bol} = 0{,}2$. Ефективне температуре компонената су 10.700 K и 9800 K. Нагиб равни и ексцентричност орбите су занемарљиви, а период је $P = 50$ година. Колико је највеће растојање до овог система за које се две звезде виде размакнуте за $\alpha = 0{,}5''$? За беле патуљке важи: маса не прелази Чандрасекхарову границу, $\mathfrak{M}_{ch} = 1{,}44\ \mathfrak{M}_{\odot}$, и релација између полупречника и масе - $R^{-1} \propto \mathfrak{M}^{1/3}$.

Решење. Хелиоцентрично растојање s и размак у тангенцијалној равни су повезани изразом

$$\alpha = \frac{a}{s},$$

где је a полупречник орбите, с обзиром на то да су нагиб и ексцентричност занемарљиви; a се изражава у aj, s у pc. Пошто α има фиксну вредност, највеће растојање s одговара највећем полупречнику. Трећи Кеплеров закон гласи

$$a^3 = \mathfrak{M}P^2 \ .$$

За овакву формулациу услов је да је маса $\mathfrak{M}$ изражена у $\mathfrak{M}_{\odot}$, период у годинама и a у aj. Употребљени размак занчи да је у питању релативна орбита, а тада је маса једнака укупној маси (збиру маса компонената). Пошто период има утврђену вредност, највећи полупречник ће бити за највећу масу. Њавећа маса се постиже онда када је маса масивније компоненте једнака Чандрасекхаровој граници. Сада треба наћи однос маса. Пошто су обе звезде на истом растојању од нас, разлика привидних болометријских величина једнака је разлици апсолутних ΔM_{bol}. Однос луминозности одређујемо по формули

$$\log \frac{L_1}{L_2} = 0{,}4\,\Delta M_{bol}\ .$$

С друге стране је овај однос дат као

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{{R_1}^2{T_1}^4}{{R_2}^2{T_2}^4}\ ,$$

где је T ознака за температуру, а R за полупречник звезде, при чему се број 1 односи на компоненту са већом температуром. Замена датих вредности даје $R_1 = 0{,}92\ R_2$, тј. хладнија компонента има већи полупречник. Примена релације између масе и полупречника, тј.

$$\left(\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2}\right)^{1/3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-1}\ ,$$

резултује односом маса једнаким 1,285, тј. $\mathfrak{M}_2 = 0{,}778\ \mathfrak{M}_1$. Ако је $\mathfrak{M}_1 = 1{,}44\ \mathfrak{M}_\odot$, следи $\mathfrak{M}_2 = 1{,}12\ \mathfrak{M}_\odot$, па је укупна маса $\mathfrak{M} = 2{,}56\ \mathfrak{M}_\odot$. Ово је највећа могућа маса јер су обе звезде бели патуљци. Према трећем Кеплеровом закону полупречник орбите онда не може бити већи од 18,57 ај, тј. највеће растојање је 37,13 pc.

4. У средишту једног квазара налази се црна рупа чија је маса милијарду пута већа од Сунчеве. Процени век трајања квазара, ако залиха његове енергије зрачења износи 1% апсолутне вредности потенцијалне (гравитацијске) енергије црне рупе. Болометријске апсолутне величине Сунца и квазара су 4,75 и $-27{,}44$, респективно.

Решење. Потенцијалну енергију представљамо следећом формулом

$$W_p = -G\,\frac{{\mathfrak{M}_{bh}}^2}{R_{sch}}\ .$$

Овде је R_{sch} Шварцшилдов полупречник, за кога важи следећа једнакост

$$R_{sch} = \frac{2G\mathfrak{M}_{bh}}{c^2}\ ,$$

где је c брзина светлости. Тако долазимо до следећег израза

$$\left|W_p\right| = \frac{1}{2}c^2\mathfrak{M}_{bh}\ .$$

Све потребне вредности су познате и тако се добија $|W_p| = 9 \times 10^{55}$ J. Стоти део ове вредности подељен луминозношћу квазара, једнаком $L \approx 7{,}5 \times 10^{12} L_\odot = 2{,}87 \times 10^{39}$ W, јер је (Сунчева луминозност у списку константата)

$$\log \frac{L}{L_\odot} = 0{,}4\left(M_{bol\odot} - M_{bol}\right),$$

даје време од $3{,}13 \times 10^{14}$ s, што је приближно 10^7 година. Толики је век трајања квазара док зрачи оволиком луминозношћу.