РЕГИОНАЛНО ТАКМИЧЕЊЕ 2019

I Питања

1. Спој звезду и сазвежђе у коме се налази. А) Антарес, Б) Бетелгејз, В) Денеб, Г) Капела, Д) Кастор, Ђ) Кохаб; 1) Близанци, 2) Кочијаш, 3) Лабуд, 4) Мали медвед, 5) Касиопеја, 6) Шкорпион.

Одговор. А-6, В-3, Г-2, Д-1, Ђ-4. Бетелгејз и Касиопеја су вишак.

2. Поређај по удаљености од Сунца и напиши од којих објеката се претежно састоје. А) Кајперов појас; Б) Ортов облак; В) Астероидни појас.

Одговор. В – астероиди, А - астероиди, Б) – језгра комета.

3. Из датог списка одабери и поређај у правилном редоследу фазе еволуције звезде масе једнаке једној Сунчевој маси. 1) Супернова, 2) Планетна маглина, 3) Протозвезда, 4) Црвени џин, 5) Главни низ, 6) Бели патуљак, 7) Неутронска звезда, 8) Црна рупа.

Одговор. 3 – 5 - 4 – 2 - 6.

II Задаци

1. На данашњи дан (датум такмичења) звезда је изашла у 5 часова и 36 минута по средњем Сунчевом времену. Када (час и минут) ће она изаћи на дан дугодневице?

Решење, први начин. Небеска сфера се привидно окрене око Земље за 1 звездани (сидерички) дан који траје $23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}$, тј. толико траје и привидно обилажење звезда пројектованих на небеску сферу око Земље. Због кретања Земље око Сунца потребно је да прође још 4 минута да би Земља дошла у исти положај према Сунцу. Овај период се зове средњи Сунчев (синодички) дан и траје 24^{h}. Због тога што је звездани дан краћи за 4 минута од средњег Сунчевог (синодичког) дана звезда ће кроз 84 дана, колико има од 30. марта до 22. јуна (дугодневица), изаћи $84 \cdot 4 = 336$ минута раније, тј. тачно у поноћ.

Решење, други начин. Између 30. марта (датум такмичења) и 22. јуна (дугодневица) размак износи 84 дана. Њега треба упоредити са размаком од 365,2422 дана (тропска година) јер се за време тог размака Сунчева ректасцензија промени за 24^{h}. Следи пропорција

$$84 : 365{,}2422 = x : 24\,,$$

где је x тражена вредност изражена у часовима. Решење износи 5,5196 часова или 5 часова и 31,177 (≈ 31) минута. Пошто се Сунчево привидно годишње кретање око Земље догађа у смеру супротном од привидног обртања небеске сфере, дата звезда ће 22. јуна изаћи за толико раније по средњем Сунчевом времену, тј. 5 минута после поноћи. Напомиње се да се овде под речју дан подразумева средњи дан по Сунцу.

Напомена. До неслагања између два решења долази услед прецизности у рачунању.

2. Колико Месец може највише да се попне изнад хоризонта у твом месту? У које доба године би ова појава могла да се посматра? (Скица обавезна).

Решење. (за Београд) Месец се креће скоро по еклиптици (константе). За време пуног месеца Месец се налази тачно насупрот Сунцу (ректасцензије им се разликују за 12 часова, или лонгитуде за 180°). Пошто се зими Сунце налази јужно од екватора, Месец се налази северно. Зато је дању Сунце ниско изнад хоризонта, а Месец ноћу високо. Дакле, максимална висина Месеца може да се очекује зими, и то око краткодневице, када је висина Сунца минимална. Знајући вредности за угао нагиба еклиптике према екватору ε и равни Месечеве орбите према еклиптици i (константе), као и географске ширине места (за Београд $\varphi = 44°48'$), максималну висину Месеца у горњој кулминацији налазимо као (комплементу географске ширине се додаје деклинација)

$$h_{max} = 90 - \varphi + \varepsilon + i \ .$$

За Београд (вид. скицу) је $h_{max} = 73°47'$.

Овај закључак се може још образложити уз помоћ формуле за налажење деклинације из познатих еклиптичких координата. Она гласи

$$\sin\delta = \cos\varepsilon \sin\beta + \sin\varepsilon \cos\beta \sin\lambda \ .$$

Као што је већ речено, за време пуног месеца лонгитуде λ Сунца и Месеца се разликују за 180°, а ако је још краткодневица Месечева лонгитуда ће бити 90°, јер је Сунчева 270°. Следи да тада за Месечеву деклинацију важи:

$$\sin\delta = \cos\varepsilon \sin\beta + \sin\varepsilon \cos\beta = \sin(\beta + \varepsilon) \ .$$

3. Летелица је избачена са Земље у правцу Месеца почетном брзином (брзина на Земљиној површи) v_0. У тренутку када достигне геоцентрично растојање $\mathfrak{R}_l$ налази се између Земље и Месеца на правој која пролази кроз њихове центре, а њена геоцентрична брзина једнака је нули. Летелица треба да доспе на Месечеву површ. Одреди најмање могуће вредности за $\mathfrak{R}_l$ и v_0. Сматрај да су Земља и Месец савршене лопте, занемари утицај Земљине атмосфере и још да је све до геоцентричног растојања $\mathfrak{R}_l$ деловање Месечеве гравитације на летелицу занемарљиво, а на већим геоцентричним растојањима узми у обзир само Месечево дејство. Ексцентричност Месечеве орбите се такође занемарује.

Решење. Да би летелица додирнула Месечеву површ њено периселенско растојање (перицентрично за Месец) треба да задовољи следећи услов: $r_p \leq R_m$, где је R_m Месечев полупречник. Пошто је на граничном растојању од Земљиног средишта $\mathfrak{R}_l$ геоцентрична брзина летелице једнака нули, а она се налази на правој која пролази кроз средишта Земље и Месеца, закључујемо да је на том положају селеноцентрична брзина летелице једнака Месечевој геоцентричној брзини, само што је смер супротан. Због истог правца вектор селеноцентричне брзине је нормалан на вектор селеноцентричног положаја. Дакле, у односу на Месец летелица је је на апоселенском растојању, r_a. По дефиницији, апоселенска брзина је једнака количнику специфичног момента количине кретања и апоселенског растојања. Следи формула

$$r_a{}^2 = \frac{G\,\mathfrak{M}_m r_p (1+e)}{v_a{}^2} \quad . \qquad (1)$$

Ознаке: G - константа гравитације, $\mathfrak{M}_m$ - Месечева маса, e - ексцентричност селеноцентричне орбите и v_a - апоселенска брзина. Вредност брзине v_a налазимо из услова једнакости са Месечевом геоцентричном брзином:

$$v_a = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{a_m}} \quad .$$

Све потребне вредности налазимо у списку константи ($\mathfrak{M}_\oplus$ је маса Земље, a_m средње растојање између Земље и Месеца), $v_a = 1{,}02\ \mathrm{km\ s^{-1}}$. С обзиром на то да је по дефиницији

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad ,$$

израз (1) добија нов облик

$$\left(\frac{r_a}{r_p} + 1\right) r_a = \frac{2G\mathfrak{M}_m}{v_a{}^2} \quad . \qquad (2)$$

У изразу (2) производ на левој страни једнак је фиксној вредности (све величине су познате, износи $9{,}44 \times 10^3$ km). Стога раст једног чиниоца захтева смањење другог. Због бржег раста количника r_a/r_p мањим вредностима r_p одговараће мање вредности r_a. Следи да ће највеће апоселенско растојање да се догоди за највеће периселенско, а то је полупречник Месеца. Но, како је $\mathfrak{R}_l + r_a = a_m$ (константа вредност), тражено најмање $\mathfrak{R}_l$ биће за највеће r_a. Знајући полупречник Месеца за највеће могуће r_a добија се вредност од 3275 km, а даље знајући полупречник Месечеве орбите за најмању вредност $\mathfrak{R}_l$ добијамо 380.752 km.

Податак да је геоцентрична брзина на растојању $\mathfrak{R}_l$ једнака нули значи да је кретање у односу на Земљу праволинијско. На основу одржања специфичне енергије важи

$$v_0{}^2 = 2G\mathfrak{M}_\oplus \left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{\mathfrak{R}_l}\right) .$$

Одавде се јасно види да најмањој вредности $\mathfrak{R}_l$ одговара најмања вредност почетне брзине v_0. Она износи $11{,}09\ \mathrm{km\ s^{-1}}$.

4. Астроном располаже дурбином чији је пречник објектива $D = 100$ mm. Колика је светлосна енергија сакупљена овим објективом у поређењу са голим оком? Одреди највећу апсолутну

величину за звезду на растојању $r = 100$ pc која се може видети помоћу овог дурбина при увеличању $\Gamma = 10$. Сматрај да је на оволиком растојању међузвездана екстинкција занемарљива, а такође занемари екстинкцију у Земљиној атмосфери. Пречник зенице ока је $\delta = 6$ mm, гранична привидна величина при посматрању голим оком $m_e = 6$.

Решење. Да би се достигла апсолутна величина M за дато растојање r одговарајућа привидна величина треба да буде што већа. Привидна величина ће бити већа због веће сакупљене светлосне енергије, а она је пропорционална квадрату пречника пријемника. Поређење сакупљене енергије помоћу објектива и голим оком даје:

$$\xi = \frac{D^2}{\delta^2} = \frac{10^4 \mathrm{mm}^2}{36 \mathrm{mm}^2} \ .$$

Другим речима датим објективом се сакупи 277,8 пута већа енергија. Међутим, као што пише у поставци задатка, при посматрању се користи окулар са увеличањем $\Gamma = 10$. Ово значи да треба узети однос квадрата пречника објектива и окулара:

$$\xi' = \Gamma^2 \ , \quad \Gamma = \frac{D}{d} \quad ,$$

где су D и d пречник објектива и окулара, респективно. Даље, према дефиницији привидне величине је

$$0{,}4 \Delta m = \log \xi' .$$

Следи $\Delta m = 5$. С обзиром на дату вредност $m_e = 6$ ова разлика даје $m = 11$. Заменом у Погсонову формуле са нултом екстинкцијом

$$M = m - 5 \log r \ + 5 \quad ,$$

добија се $M = 6$ ($r = 100$ pc).