

РЕГИОНАЛНО ТАКМИЧЕЊЕ 2018

I Питања

1. Колико је времена потребно Сунчевом зраку да стигне до Земље, а колико му је потребно да из Сунчевог средишта стигне до Сунчеве површи?

Одговор. У првом случају 8,31 минута, а у другом милион година.

2. Колико се пута током године Сунце било где на Земљи нађе у зениту?

Одговор. Сваког дана је негде на Земљи Сунце у зениту. Тачке у којима је то случај се премештају по спиралној завојници од подневка до подневка између јужног и северног повратника, тј. ракове и јарчеве обратнице. Дакле, тачан одговор је 365.

3. Колико средњих Сунчевих дана може да буде у једном календарском месецу код лунарног календара?

Одговор. За календар се каже да је лунарни (на пр. муслимански) ако је његов основни временски размак Месечев синодички период. Овај период износи 29,53 средњих Сунчевих дана. Пошто календарски месец мора имати цео број дана, следи да код лунарног календара један месец може да садржи 29 или 30 дана.

II Задаци

1. Може ли дању да се посматра доња кулминација Сунца и са којих географских ширина? Изведи релацију за граничну географску ширину.

Решење. Да би се Сунце уопште видело, оно мора бити изнад хоризонта, тј. његова висина мора да испуни услов: $h_{\odot} \geq 0$. Онда ће најмања географска ширина по апсолутној вредности бити за највећу деклинацију Сунца по апсолутној вредности, тј. $|\delta_{\odot}| \leq \varepsilon$ (нагиб еклиптике према екватору). Услов за доњу кулминацију Сунца, независно од хемисфере, је

$$|\varphi| = 90 - |\delta_{\odot}| + h_{\odot} .$$

Одавде следи $|\varphi| \geq 66^{\circ}34'$, јер је $|\delta_{\odot}|_{max} = \varepsilon$.

Дакле, унутар ледених појасева је могуће видети Сунце када је оно у доњој кулминацији (поноћно Сунце). Што је посматрач ближе неком од полова, то више доњих кулминација може да види.

2. Посматрач се налази на географској ширини $\varphi = 45^\circ$. Он прати вештачки Земљин сателит у горњој кулминацији и налази да се висина сателита креће од $h_{min} = 20^\circ 8'$ до $h_{max} = 34^\circ 20'$. Орбита сателита се налази у равни Земљиног екватора. Колики је период обиласка сателита? Земља има лоптаст облик.

Решење. Пошто се ради о горњој кулминацији, сателит се налази у равни посматрачевог подневка (меридијана). У тој равни се разматра троугао SCT чија су темена: S - положај сателита, C – средиште Земље и T топоцентар (посматрач). Дужина странице SC једнака је геоцентричном растојању сателита r , дужина дужи CT једнака је полупречнику Земље R_\oplus . Углови код темена C и T су познати, једнаки су φ и $90 + h$, респективно, јер се сателит креће у екваторској равни. Из истог разлога (сателит је увек у екваторској равни) променљивост висине потиче од промене геоцентричног растојања сателита. Следи закључак да је орбита сателита елипса. Највећа висина одговара апогеју сателита, а најмања перигеју. За случај екстремних вредности висине угао у овом троуглу код темена S има вредности: $24^\circ 52'$ за најмању висину и $10^\circ 40'$ за највећу висину. Применом синусне теореме се онда могу израчунати растојања сателита у перигеју r_p и апогеју r_a у јединицама Земљиног полупречника; добија се: $r_p = 2,23 R_\oplus$ и $r_a = 4,46 R_\oplus$. За период обиласка потребна је дужина велике полуосе орбите a , а она је једнака

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} .$$

У наредном кораку применом трећег Кеплеровог закона добија се тражени период P

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} .$$

Ознаке: G – константа гравитације, M_\oplus маса Земље; резултат $P = 8^h 37^m$.

3. Пошто се налази на главном низу, енергија коју Сунце зрачи у околни простор потиче од термонуклеарних реакција. Прве реакције се догађају у средишњем делу Сунца (недра; core, енг.) где се протони (${}_1\text{H}^1$, $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg) претварају у α -честице (${}_2\text{He}^4$, $m_\alpha = 6,64 \times 10^{-27}$ kg). За Сунце се очекује да на главном низу борави око $\tau = 1 \times 10^{10}$ година. Процени укупан број протона у недрима Сунца у почетном тренутку и укупну масу овог дела Сунца ако је удео протона по маси био око 70%. Колики је удео масе недара у укупној маси Сунца?

Решење. Луминозност Сунца се помножи датим временом. Тако се добија укупна произведена енергија, $E_\odot \approx L_\odot \cdot \tau \approx 1,2 \times 10^{44}$ J. Пошто потиче од термонуклеарних реакција, она је једнака производу дефекта масе и квадрата брзине светлости. Као последица, укупан дефект масе ће бити једнак: $E_\odot = \Delta m c^2 \Rightarrow \Delta m = 1,33 \times 10^{27}$ kg. Сада треба проценити дефект масе по протону

(Δm_{1p}). У процени се полази од чињенице да је α -честица око четири пута масивнија од протона, па се узима да једну α -честицу дају четири протона. Укупна маса четири протона износи $6,68 \times 10^{-27} \text{ kg}$, што је за $0,04 \times 10^{-27} \text{ kg}$ веће од масе једне α -честице; на један протон долази четвртина ове вредности, $\Delta m_{1p} = (4m_p - m_\alpha)/4$. Тако се долази до броја од $N = \Delta m / \Delta m_{1p} = 1,3 \times 10^{56}$ протона чија је укупна маса $m_{p,tot} = Nm_p = 2,1 \times 10^{29} \text{ kg}$. С обзиром на дати удео протона по маси (70%) следи укупна маса недара од $m_{core} = 3 \times 10^{29} \text{ kg}$. Укупан дефект масе за све време проведено на главном низу је занемарљив (мањи од 10^{-3}). Стога се може узети вредност укупне масе Сунца дата у Таблици констаната. Удео недара је онда око 15%.

4. Сматра се да активна језгра галаксија, позната по својим великим енергијама зрачења, садрже веома масивне црне рупе. Један од метода за одређивање масе такве црне рупе је и метод мапирања реверберације¹ (reverberation mapping, енгл.). Улазни подаци за овај метод су димензије области континуалне емисије и ширина линије у спектру. Димензије се одређују из тзв. времена кашњења (time delay, енгл.). Нека је дато активно језгро за које време кашњења износи $\tau = 6$ дана, док је ширина линије $\Delta\lambda = 50 \text{ \AA}$ (при таласној дужини $\lambda = 5000 \text{ \AA}$). Процени масу средишње црне рупе у односу на масу Сунца.

Решење. Време кашњења и димензије су повезани једноставним изразом $R = c\tau$, где је c брзина светлости у вакууму ($R \approx 0,005 \text{ pc}$). Користећи познату релацију Доплеровог ефекта

$$v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

где је v средња квадратска брзина гаса, остале ознаке су познате, може да се процени маса црне рупе на следећи начин: гас се креће око црне рупе и честица гаса је у везаном стању, тј. њена енергија по јединици масе је негативна

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_{BH}}{R} < 0 \Rightarrow v^2 \sim \frac{GM_{BH}}{R}.$$

Знак \sim значи једнакост по реду величине, с обзиром на то да се тражи процена; G је константа гравитације. Замењивање претходно израчунатих вредности даје $M_{BH} \sim 10^7 M_\odot$.

¹ одјек, јака, ехо, одзвањање, одбљесак; од латинске речи reverberare: поново ударити.